

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

23. Band, Heft 7

4. Februar 1941

S. 289—336

Logik.

Church, Alonzo: A formulation of the simple theory of types. *J. Symbolic Logic* 5, 56—68 (1940).

Verf. gibt eine symbolische Einkleidung des durch die einfache Typentheorie erweiterten Funktionenkalküls, bei der im wesentlichen dieselben Operatoren wie bei seinem bekannten Kalkül der λ -Konversion (A. Church, *Mathematical Logic* [autographiert], Princeton N. J. 1936) verwendet werden, nur daß sie im vorliegenden Falle mit variablen Typenindizes versehen sind. Die Definition der natürlichen Zahlen ist ebenfalls entsprechend; das mehrfache Auftreten derselben Zahlen als Funktionen von verschiedenem Rang läßt sich natürlich wie bei jeder Typenlogik auch hier nicht vermeiden. Die angegebene Fassung der Typentheorie verdient infolge ihrer Einfachheit auch an und für sich, ohne Beziehung zur Theorie der λ -Konversion, Beachtung.

Ackermann (Burgsteinfurt).

Sobociński, Bolesław: Aus den Untersuchungen zur Protothetik. *Collectanea Logica* 1, Warszawa 171—177 (1939) [Polnisch].

In dieser Abhandlung werden 12 Vereinfachungen der Tarskischen Definition für Kpq („ p und q “) im System der Protothetik (vgl. dies. Zbl. 23, 97—99) angegeben. Indem ich die für dies. Zbl. 23, 97—99 festgesetzte Symbolik festhalte, kann ich die neuen Formeln so anschreiben:

- | | |
|--|---|
| 1. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(pq) f(qI)$ | 7. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(qq) f(pI)$ |
| 2. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(pq) f(Ip)$ | 8. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(qq) f(Ip)$ |
| 3. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(qp) f(pI)$ | 9. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(pq) f(II)$ |
| 4. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(qp) f(Iq)$ | 10. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(qp) f(II)$ |
| 5. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(pp) f(qI)$ | 11. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(Ip) f(qI)$ |
| 6. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(pp) f(Iq)$ | 12. $\Pi p \Pi q E K p q \Pi f E f(Iq) f(pI)$ |

I ist der ausgezeichnete Wert der klassischen zweiwertigen Matrix. Für „ I “ kann überall auch „ Epp “, „ Eqq “, „ Epp “, „ Eqp “ gesetzt werden. Man verifiziert diese Äquivalenzen nach derselben Methode wie die grundlegende Äquivalenz von A. Tarski (vgl. dies. Zbl. 23, 97—99). — Der Verf. hat bemerkt, daß man auf eine analoge Art auch „ $NApq$ “, „ $NCpq$ “, „ $NANq$ “ definieren kann.

Heinrich Scholz.

Leonard, Henry S., and Nelson Goodman: The calculus of individuals and its uses. *J. Symbolic Logic* 5, 45—55 (1940).

Der vorliegende Aufsatz enthält einen genau durchgeführten Aufbau eines „Individuenkalküls“ und die Anwendung dieses Kalküls auf eine Reihe von „Konstitutionsfragen“. — S. Leśniewski hat in seiner „Mereologie“ [*Przegląd filozoficzny* 30—34 (1927—1931)] einen Aufbau einer Mengenlehre gegeben, in der die Russellsche Paradoxie nicht konstruiert werden kann. A. Tarski hat in „I. H. Woodger, The axiomatic method in biology, Cambridge 1937, Appendix E“, gezeigt, daß sich diese Mereologie auch auf die Biologie anwenden läßt. Der Individuenkalkül von S. Leonard und N. Goodman fällt mit dem Kalkül der Leśniewskischen Mereologie zusammen. Es ist das wesentliche Verdienst dieser Arbeit, den schwer zugänglichen Leśniewskischen Kalkül in eine durchsichtige Form gebracht zu haben. Weiter sind eine Reihe wichtiger Definitionen in signifikanter englischer Terminologie hinzugefügt. — Einzige Grundrelation des Individuenkalküls ist die zweistellige Relation „ist fremd zu“. Die Anwendbarkeit dieses Kalküls in so vielen Gebieten beruht wesentlich darauf, daß sich in ihm eine Teilrelation definieren läßt. Weiter ermöglicht er die Einführung der „Vereinigung“ und des „Durchschnitts“; Relationen, die zwischen Individuen und

Klassen bestehen, und nicht, wie üblich (vgl. *Principia mathematica*), zwischen Klassen und Klassen. — Die Verff. wenden ihren Kalkül in der Hauptsache an auf die Theorie der „multigrade“ Relationen. Eine „multigrade relation“ ist z. B. die Relation „ist verwandt mit“; denn sie kann bestehen z. B. zwischen zwei Individuen, sie kann aber auch bestehen zwischen einer beliebigen endlichen Anzahl von Individuen. Die Theorie dieser Relationen war bisher nicht sehr durchsichtig (vgl. R. Carnap, *Der logische Aufbau der Welt*. Berlin 1928). In der von den Verff. angegebenen Art wird sie es. Eine Reihe weiterer Beispiele (z. B. die Unterscheidung von „internal“ und „external“ Relationen) zeigen, daß der Individuenkalkül in der Tat bei Anwendungen sich sehr bewährt.

K. Schröter (Münster i. W.).

Algebra und Zahlentheorie.

Piene, Kay: Gültigkeitsgebiete der Elementarmathematik. Norsk mat. Tidsskr. 22, 70—79 (1940) [Norwegisch].

Verf. stellt methodische Betrachtungen über die Ausnutzung der Gültigkeitsbereiche im Algebraunterricht der höheren Schulen an. Bei der Aufgabe, einen gegebenen Buchstaben-ausdruck durch Einsetzen numerischer Werte auszurechnen, soll der Schüler gleichzeitig feststellen, innerhalb welcher Grenzen für die einzelnen Buchstabengrößen die Werte des ganzen Ausdrucks und seiner Teile (Klammergrößen, Zähler und Nenner vorkommender Brüche usw.) den Bereichen der natürlichen oder der ganzen oder der reellen Zahlen usw. angehören. Ähnliche Fragen sind bei der Auflösung der algebraischen Gleichungen zu stellen. Besonders wichtig sind solche Fragen über Gültigkeitsbereiche endlich bei der Behandlung des Funktionsbegriffes. Verf. gibt hier einen kurzen geschichtlichen Überblick über die verschiedenen Definitionen der Funktion durch Johann Bernoulli, Euler und Dirichlet und erörtert im Anschluß daran die Frage, wieweit diese Definitionen sich für die Verwendung im Schulunterricht eignen.

Max Zacharias (Berlin).

Polynome:

Tocchi, Luigi: Sul massimo comun divisore delle funzioni intere. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 75, 87—96 (1939).

Verf. stellt die Bedingungen dafür auf, daß zwei Polynome $f(x)$ und $\varphi(x)$ der Variablen x einen gemeinsamen Teiler von einem vorgegebenen Grade besitzen, und gibt eine Methode zur Berechnung desselben an. [Vgl. die Arbeit desselben Verf. in *Esercit. Mat.*, II. s. 10, 109—130 (1937); dies. Zbl. 17, 386.] Die Methode des Verf. stimmt mit der sogenannten ersten Eulerschen Methode überein. [Vgl. *Enzyklopädie math. Wissensch.* 1898—1904, IB 1a, S. 247, sowie E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik* 1, 1. Hälfte, S. 270 (1910), 2. Aufl.; dort weitere Literaturangaben.]

Gröbner (Wien).

Sergescu, P.: Über die Grenzen der absoluten Werte der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Gaz. mat. 45, 512—515 (1940) [Rumänisch].

Ist

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{i-1} x^{n-i+1} - a_i x^{n-i} + \dots + a_{j-1} x^{n-j+1} - a_j x^{n-j} + \dots \pm a_n = 0$$

eine Gleichung mit den negativen Koeffizienten $-a_i, -a_j, \dots, -a_s, -a_t$ und ist A die größte der Zahlen a_i, a_j, \dots, a_t , so ist nach MacLaurin $1 + \frac{A}{a_0}$ eine obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. J. J. Bret [*Ann. math. pures appl.* 6, 112—122 (1815/16)] betrachtet die Folge

$$1 + \frac{a_i}{a_0 + a_1 + \dots + a_{i-1}}, \quad 1 + \frac{a_j}{a_0 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_{j-1}}, \dots, \\ 1 + \frac{a_t}{a_0 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_{t-1}},$$

in der die Zähler der Brüche die absoluten Werte der negativen Koeffizienten und die Nenner die Summen der positiven Koeffizienten sind, die dem im Zähler stehenden

Koeffizienten vorangehen. Der größte Wert in dieser Folge ist eine obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. Verf. gibt einige Anwendungen des Satzes von MacLaurin und einen neuen Beweis des Satzes von Bret. *Max Zacharias.*

Sergescu, P.: Généralisations des limites de J. J. Bret. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 22, 460—465 (1940).

Verf. beweist mehrere Verallgemeinerungen der folgenden Sätze von J. J. Bret [Ann. math. pures appl. 6, 112—122 (1815/16)]: Hat das Polynom $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ genau v negative Koeffizienten: $a_i = -B_i, a_j = -B_j, \dots, a_t = -B_t$ ($i < j < \dots < t$) und sind $A_\sigma = a_\sigma$ bzw. $A_\sigma = 0$, je nachdem $\sigma \neq i, j, \dots, t$ bzw. $\sigma = i, j, \dots, t$, so ist

$$M_1 = 1 + \text{Max} \left\{ \frac{B_i}{1 + A_1 + \dots + A_{i-1}}, \frac{B_j}{1 + A_1 + \dots + A_{j-1}}, \dots, \frac{B_t}{1 + A_1 + \dots + A_{t-1}} \right\}$$

und

$$M_2 = 1 + \text{Max} \left\{ \sqrt[i]{B_i}, \sqrt[j]{B_j}, \dots, \sqrt[t]{B_t} \right\}$$

je eine obere Schranke der positiven Nullstellen des Polynoms $f(x)$. *Gy. v. Sz. Nagy.*

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Church, Randolph: Numerical analysis of certain free distributive structures. Duke math. J. 6, 732—734 (1940).

Verf. gibt eine Tabelle der Anzahlen konjugierter Elemente der freien distributiven Verbände mit höchstens 5 Erzeugenden. 2 Elemente heißen dabei konjugiert, wenn sie durch eine Permutation der Erzeugenden auseinander hervorgehen. *Lorenzen.*

Ward, Morgan: Residuated distributive lattices. Duke math. J. 6, 641—651 (1940).

Verf. untersucht die Gültigkeit der Zerlegungssätze der Idealtheorie in einem „residuated lattice“ S mit Maximalbedingung. Scheißt Noether-lattice“ (N-lattice), wenn jedes irreduzible Element primär ist. Entgegen Ward-Dilworth (dies. Zbl. 21, 108) ist die Zerlegung in Primärkomponenten in beliebigen distributiven N-lattices nicht eindeutig, wohl aber in „principal-element-lattices“ (P-lattice) bzw. „semi-arithmetical-lattices“ (SA-lattice), in denen $ac = b$ genau dann, wenn $a \supset b$, gilt bzw. stets $a:(b \cap c) = a:b \cup a:c$ gilt. In einem P- bzw. SA-lattice ist ein Primärelement stets Primpotenz bzw. irreduzibles Element und umgekehrt. Ein N-lattice ist genau dann P- bzw. SA-lattice, wenn 1. jedes Primärelement Primpotenz ist und 2. für primes p und $q \supset p$ folgt $qp = p$, bzw. wenn je zwei Primärelemente teilerfremd oder ineinander enthalten sind. *Lorenzen (Bonn).*

Monteiro, António: Sur l'additivité dans un anneau. Portugaliae Math. 1, 289—292 (1940).

Wenn für zwei Elemente a, b in einem Ringe die Beziehung $(a + b)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$ für jede natürliche Zahl α besteht, so werden die a, b additiv genannt. Über diesen Begriff werden einige Sätze angeführt, z. B. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen $ab + ba = 0, aba + bab = 0$, sowie einige Beispiele und Bemerkungen. *O. Borůvka (Brünn).*

Gertschikoff, A. I.: Über Ringe, die in eine direkte Summe von Körpern zerlegbar sind. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 591—596 u. deutsch. Zusammenfassung 597 (1940) [Russisch].

Satz: Ein assoziativer Ring ist dann und nur dann die Ringsumme von endlich oder unendlich vielen Schiefkörpern, wenn in ihm 1. die Minimalbedingung für linksseitige Hauptideale erfüllt ist und 2. nilpotente Elemente nicht in ihm vorkommen. Die Notwendigkeit der Bedingungen 1. 2. ist klar. Weiter zeigt die scharfsinnige Untersuchung des § 2 die Lösbarkeit der Gleichung $axa = a$ für jedes a in Schieftringen, die 1. 2. genügen, d. h. diese Schieftringe sind regulär im Sinne von J. von Neumann [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 707—713 (1936); dies. Zbl. 15, 388]. Die von letzterem entwickelten Eigenschaften der regulären Schieftringe werden in § 1 noch einmal bewiesen. Jedes Hauptideal ist zweiseitig und besitzt eine Haupteinheit, die dem Zentrum des ganzen Schieftringes angehört. Jedes kleinste Ideal ist ein Schiefkörper.

In §3 werden Schieferringe mit den Eigenschaften 1. 2. in die Ringsumme ihrer kleinsten Ideale zerlegt.
Zassenhaus (Hamburg).

Zassenhaus, Hans: Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Ringe bei Charakteristik $p > 0$. J. reine angew. Math. 182, 150—155 (1940).

Mit Hilfe einer Formel für die p^e -te-Potenz einer Summe in einem nichtkommutativen Ring von der Charakteristik p werden alle irreduziblen Darstellungen eines beliebigen nilpotenten Lie-Ringes endlichen Ranges über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k von der Charakteristik Null bestimmt. Es zeigt sich, daß jede Matrix der Darstellung nur einen einzigen Eigenwert α besitzt, und daß die Darstellung bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist durch die Eigenwerte der Basiselemente des Lie-Ringes. Diese Eigenwerte sind beliebig wählbar. Der Grad einer jeden irreduziblen Darstellung ist eine Potenz von p , eventuell 1. *van der Waerden.*

Sagastume Berra, Alberto E.: Über lineare Systeme und Determinanten in Schiefkörpern. An. Soc. Ci. Argent. 129, 199—202 (1940) [Spanisch].

Gegeben ein Schiefkörper S . Es sei $a^b = b^{-1}ab$, wenn $b \neq 0$, und $a^b = a$, wenn $b = 0$ ($a, b \in S$). Verf. definiert Determinanten mit Elementen aus S . Die Definition für zweireihige Determinanten (in der Hauptform) lautet

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}^{a_{11}^{-1}}.$$

Durch Induktion nach n wird die Definition auf n reihige Determinanten erweitert. Verf. gibt (ohne Beweis) an, daß diese Determinanten entsprechenden Gesetzen genügen, wie die gewöhnlichen Determinanten. Insbesondere werden der Entwicklungssatz und die Cramersche Regel angeführt.
H. L. Schmid (Berlin).

Zahl- und Funktionenkörper:

Scholz, Arnold: Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen. 2. J. reine angew. Math. 182, 217—234 (1940).

Im Anschluß an seine Arbeit über Abelsche Durchkreuzung [Mh. Math. Phys. 48, 340—352 (1939); dies. Zbl. 23, 211] untersucht Verf., wie der sogenannte Knoten eines Normalkörpers K/K_0 mit der absoluten Galoisstruktur (in bezug auf K_0) der Klassenkörper von K zusammenhängt. Knoten heißt dabei die Faktorgruppe H_0/N_0 zweier Zahlgruppen aus K_0 , nämlich der Gruppe H_0 der totalen Normenreste in K_0 , d. h. aller Zahlen, die nach jedem Modul kongruent einer Norm sind, und der Gruppe N_0 der Normen aus Zahlen aus K . Folgende Begriffe werden außerdem eingeführt: Ist A abelsch über K_0 , so heißt KA abelsche Erweiterung von K . Ist Z eine Erweiterung von K , deren Relativgruppe über K im Zentrum ihrer Galoisgruppe über K_0 liegt, so heißt Z zentrale Erweiterung von K . Eine zentrale Erweiterung von K , die keine Abelsche Erweiterung von K enthält, heißt Knotung von K . Zwei Hauptprobleme werden gestellt und teilweise gelöst: 1. Wann ist K knotenfrei? Verf. zeigt, daß der Knoten eines Normalkörpers K mit der Gruppe \mathfrak{G} zum Multiplikator ihrer Darstellungsgruppe isomorph ist. K ist also knotenfrei, wenn \mathfrak{G} abgeschlossen ist, d. h. ihre eigene Darstellungsgruppe ist. 2. Wenn K einen von 1 verschiedenen Knoten H_0/N_0 besitzt, läßt sich dann eine Knotung K' von K finden, deren Relativgruppe über K zum Knoten H_0/N_0 isomorph ist, und beruht auch umgekehrt eine vorgelegte Galois-knotung K'/K von K/K_0 auf einem entsprechend großen Knoten von K in K_0 ? Beides ist häufig, aber nicht immer der Fall. Zuerst wird gezeigt: Sind H und N diejenigen Gruppen der Ideale in K , deren Normen in den Hauptidealgruppen (H_0) und (N_0) liegen, so ist der zu H gehörige Klassenkörper der sogenannte absolute Geschlechterklassenkörper \bar{K}^0 von K/K_0 , d. h. der maximale Teilklassenkörper des absoluten Klassenkörpers \bar{K} von K , der noch eine Abelsche Erweiterung von K ist, während der zu N gehörige Klassenkörper K^* der sogenannte zentrale Klassenkörper ist, d. h. der maximale Teilklassenkörper von K innerhalb \bar{K} , der eine zentrale Br-

weiterung von K ist. \bar{K}^* ist dann aber nur eine Knotung von \bar{K}^0/K_0 , deren Relativgruppe außerdem nur zum Idealknoten $(H_0)/(N_0)$ isomorph ist. Nur wenn die Einheitengruppe E_0 knotenfrei ist, also die Durchschnitte $[E_0, H_0]$ und $[E_0, N_0]$ gleich sind, ist also jene Relativgruppe zum Zahlknoten H_0/N_0 isomorph. Im anderen Falle ist Isomorphie mit dem Zahlknoten durch Klassenkörper einer bestimmten Schar von Führern zu erreichen. Ferner zeigt Verf., daß es immer eine Knotung A eines Geschlechterklassenkörpers KA (A abelsch, KA maximaler Teilklassenkörper eines Klassenkörpers) von K gibt, deren Relativgruppe zu H_0/N_0 isomorph ist. Daraus kann man dann für alle K einer wichtigen Klasse schließen, daß K eine Knotung N besitzt, deren Relativgruppe zum Knoten von K isomorph ist. Zu jeder Gruppe \mathfrak{G} gibt es Körper K_0 und K , für welche K über K_0 eine Gruppe der Struktur \mathfrak{G} und einen zum Darstellungsmultiplikator von \mathfrak{G} isomorphen Knoten hat. Beispiele erläutern die Sätze.

Bergström (Uppsala).

Schilling, O. F. G.: Regular normal extensions over complete fields. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 440—454 (1940).

Durch die lokale Klassenkörpertheorie bestimmen sich alle abelschen Erweiterungen eines perfekten Körpers vollständig in Worten des Unterkörpers. Verf. stellt einen Versuch an, dieselbe Frage für nicht-abelsche galoissche Erweiterungen zu erledigen. Es sei k ein diskret bewerteter Körper, dessen Primideal $\mathfrak{l} = (\lambda)$ mit der absoluten Norm $\mathfrak{l}^r = q$ ist. Es sei ferner $p \nmid 2$ eine festgelegte Primzahl, welche ein Teiler von $q - 1$ ist, so daß der Grundkörper k die p -ten Einheitswurzeln enthält. Es handelt sich nun um die vollständige Charakterisierung aller („regulär“ genannten) galoisschen Erweiterungen vom p -Potenzgrade über k . Der Vereinigungskörper $N^{(p)}$ aller regulären Erweiterungen kann folgendermaßen approximiert werden: $k \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \rightarrow N^{(p)}$, dabei ist A_i jedesmal die maximal abelsche Erweiterung des Körpers A_{i-1} vom Exponent p , also, wie leicht zu sehen ist, vom Typus (p, p) über A_{i-1} . A_i hat über k die galoissche Gruppe G_i mit den Relationen: $\{\sigma_i, \tau_i\} = G_i$, $\sigma_i^{p^i} = \tau_i^{p^i} = 1$, $\tau_i^{-1} \sigma_i \tau_i = \sigma_i^{q^i}$ und σ_i erzeugt die Trägheitsgruppe von A_i . Der Exponent q_i kann so normiert werden, daß $q_i = 1 + p^r$, $q - 1 = p^r r$, $(r, p) = 1$ für alle i ist. Beim Beweise benutzt man die Herbrandsche Verzweigungstheorie der unendlichen Körper (dies. Zbl. 7, 294) und erhält beiläufig, daß eine idealzyklische Erzeugende σ der Trägheitsgruppe von $N^{(p)}$ und ein Repräsentant τ der Erzeugenden ihrer ebenso idealzyklischen Faktorgruppe so gewählt werden kann, daß $\tau^{-1} \sigma \tau = \sigma^{1+p^r}$ gilt. Die unendliche diskrete Gruppe $F^{(p)} = \{\sigma, \tau\}$ ist überall dicht in der im Krullschen Sinne topologisierten kompakten galoisschen Gruppe von $N^{(p)}$. $F^{(p)}$ kann gewissermaßen als ein Analogon der Fuchschen Gruppe in der klassischen Theorie der algebraischen Funktionen betrachtet werden. Eine endliche Gruppe G kann dann und nur dann als die galoissche Gruppe einer regulären Erweiterung K/k realisiert werden, wenn G mit einer Faktorgruppe von $F^{(p)}$ isomorph ist. Es ist nicht so schwierig, die genaue Anzahl der regulären Erweiterungen K mit der vorgeschriebenen Gruppe G von kleinerer Ordnung zu bestimmen, und dies wird für die nicht-abelsche Gruppe von der Ordnung p^3 durchgeführt. Was den Isomorphiesatz der Klassenkörpertheorie betrifft, so gilt der folgende (anscheinend nicht so tief liegende) Satz: Die galoissche Gruppe G_i von A_i/k ist mit $D_i^*/D_i^{*p^i}$ isomorph. Dabei ist D^* die multiplikative Gruppe von Null verschiedener Elemente aus der „arithmetisch ausgezeichneten“ Algebra D_i , mit der k -Basis $\Omega_i^j A_i^k$ ($j, k = 1, 2, \dots, p$), die den folgenden Relationen genügen: (I) $A_i^{p^i} = \lambda$, (II) Ω_i ist eine primitive $(q^{p^i} - 1)$ -te Einheitswurzel, (III) $A_i^{-1} \Omega_i A_i = \Omega_i^q$; in der Bezeichnungsweise der verschränkten Produkte ist also $D_i = (\lambda, k(\Omega_i), \tau_i)$, $\tau_i = (\Omega_i \rightarrow \Omega_i^q)$. Mit Benutzung der reduzierten Norm N_i^r von D_i , kann man $D_i^{*p^i}$ auch so charakterisieren: sie ist die kleinste Untergruppe H von D_i^* , die alle Einheiten $\equiv 1$ modulo dem einzigen Primideal von D_i enthält und für die $N_i^r H = N_i A_i^*$ ist. Wenn $K \subseteq A_i$ eine beliebige galoissche Erweiterung von k ist, so entspricht diesem Körper in natürlicher

Weise eine eindeutig bestimmte Untergruppe $H \supseteq D_i^{*p^i}$ von D_i^* , und es gilt $[k^*: N_i^* H] = [k^*: N_K K^*]$. Zum Schluß wird kurz darauf hingewiesen, daß eine einzige Algebra D_i nicht genügt, um die Klassenkörpertheorie zu begründen. *T. Tannaka (Sendai).*

Weil, André: Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 592—594 (1940).

Skizze einer Lösung der Hauptprobleme der Theorie der algebraischen Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper. Wie Hasse und Deuring erkannt haben, gibt die Theorie der algebraischen Korrespondenzen den Schlüssel zu diesen Problemen, aber die Severische algebraische Theorie der Korrespondenzen genügt nicht, sondern man muß die Hurwitzsche transzendente Theorie auf diese Funktionenkörper übertragen. Zu dem Zweck wird die Gruppe der Divisorenklassen nullter Ordnung isomorph abgebildet auf eine Gruppe von Vektoren, d. h. von einspaltigen Matrices mit $2g$ Reihen, deren Elemente einem Ring \mathfrak{R} angehören, modulo 1. \mathfrak{R} entsteht aus dem Körper der rationalen Zahlen durch Komplettierung in bezug auf alle l -adischen Bewertungen, wobei l alle Primzahlen mit Ausnahme der Körpercharakteristik p durchläuft, und g ist das Geschlecht des Funktionenkörpers. Nunmehr kann man genau nach Hurwitz jeder algebraischen (m_2, m_1) -Korrespondenz eine $2g$ -reihige quadratische Matrix L zuordnen, deren Elemente $\equiv 0 \pmod{1}$ in \mathfrak{R} sind. Die inverse Korrespondenz definiert ebenso eine Matrix L' , und unter gewissen Bedingungen ist die Spur von LL' gleich $2m_2$. Mit Hilfe dieses Lemmas folgt die „Riemannsche Vermutung“ für Funktionenkörper. Schließlich wird die Wirkung der Galoisschen Gruppe eines solchen Körpers auf die den Divisorenklassen zugeordneten Vektoren untersucht. *van der Waerden.*

MacLane, Saunders, and O. F. G. Schilling: Zero-dimensional branches of rank one on algebraic varieties. Ann. of Math., II. s. **40**, 507—520 (1939).

Es wird untersucht, welche Wertegruppen für eine Bewertung eines algebraischen Funktionenkörpers in n Veränderlichen in Frage kommen. Dabei wird von vornherein angenommen, daß alle Konstanten den Wert 0 haben und die Wertegruppe Γ eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen ist. Der Rang einer solchen Gruppe Γ ist die Maximalzahl der rational linear unabhängigen Zahlen in Γ . Nun wird bewiesen: Die Wertegruppe einer Bewertung V eines algebraischen Funktionenkörpers in n Veränderlichen hat entweder einen Rang $r < n$ oder ist direkte Summe von n unendlichen zyklischen Gruppen. Ist umgekehrt eine Gruppe von reellen Zahlen Γ gegeben, die entweder einen Rang $r < n$ hat oder direkte Summe von n zyklischen Gruppen ist, so gibt es eine Bewertung des rationalen Funktionenkörpers $L = K(x_1, \dots, x_n)$ mit der Wertegruppe Γ . Das wichtigste Hilfsmittel bei der Konstruktion einer solchen Bewertung ist die Existenz einer beliebigen Anzahl von algebraisch unabhängigen Potenzreihen in einer Veränderlichen über einem beliebigen Konstantenkörper.

van der Waerden (Leipzig).

Reichardt, Hans: Über die Diophantische Gleichung $ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = ez^2$. Math. Ann. **117**, 235—276 (1940).

Es handelt sich um die Beziehungen, die zwischen folgenden drei Aufgaben über die diophantische Gleichung

$$(1) \quad ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = ez^2$$

bestehen: 1. über die Lösbarkeit zu entscheiden und im Falle der Lösbarkeit eine Lösung anzugeben; 2. falls die Gleichung lösbar ist, eine Basis des Lösungsmoduls anzugeben; 3. alle Gleichungen der Form (1) anzugeben, die sich birational mit rationalen Koeffizienten in

$$(2) \quad x^4 + bx^2y^2 + cy^4 = z^2$$

transformieren lassen. Zu 2. ist zu bemerken, daß, wenn man statt (1) die aus ihr durch die Substitution $x/y = \xi$, $z/y^2 = \eta$ hervorgehende Gleichung $a\xi^4 + b\xi^2 + c = e\eta^2$ vom Geschlechte 1 und deren rationale Lösungen betrachtet, die Lösungen nach einem Satze von Mordell hinsichtlich der aus dem Additionstheorem der elliptischen Funktionen entspringenden Addition einen Modul mit endlicher Basis bilden.

Es wird nun folgendes gezeigt: 2. und 3. können gelöst werden, wenn 1. für gewisse, endlich viele Gleichungen gelöst ist; kennt man eine Basis des Lösungsmoduls der (lösbaren) Gleichung

$$(3) \quad x^4 + bex^2y^2 + ace^2y^4 = z^2,$$

so kann 1. für (1) gelöst werden und alle mit (2) birational äquivalenten Gleichungen können angegeben werden; schließlich können 1. und 2. gelöst werden, wenn alle zu einer gewissen Gleichung des Typus $x^4 + bx^2y^2 + cy^4 = z^2$ birational äquivalenten Gleichungen bekannt sind. Den Primdivisoren ersten Grades des durch $a\xi^4 + b\xi^2 + c = e\eta^2$ definierten Funktionenkörpers entsprechen die Lösungen von (1) eindeutig, wenn unwesentlich verschiedene nur als eine Lösung gerechnet werden. Einfache Überlegungen zeigen, daß stets $e = 1$ angenommen werden kann und daß unter den Gleichungen

$$(4) \quad r(ar^2x^4 + brx^2y^2 + cy^4) = z^2$$

nur endlich viele wesentlich verschiedene lösbare vorkommen, was für das weitere wichtig ist. Jede Lösung x, y von (1) mit $e = 1$ führt, wenn eine feste Lösung x_0, y_0, z_0 zugrunde gelegt wird, zu einer Lösung x', y', z' einer Gleichung

$$(5) \quad s(ds^2x'^4 - 2bsx'^2y'^2 + y'^4) = z'^2, \quad d = b^2 - 4ac,$$

wo s nach dem über (4) Bemerkten nur endlich vieler Werte fähig ist. Dies läuft darauf hinaus, daß $K = P(\xi, \eta)$ in einen unverzweigten quadratischen Erweiterungskörper $K' = P(\xi', \eta')$ eingebettet wird, dessen Primdivisoren ersten Grades durch Normbildung mit denen von K in Zusammenhang gebracht werden. Das gleiche Verfahren, auf (5) angewandt, liefert endlich viele lösbare Gleichungen

$$(6) \quad s'(acs'^2x''^4 + bs'x''^2y''^2 + cy''^4) = z''^2,$$

unter denen die ursprüngliche wieder vorkommt, weil ja zu dem elliptischen Körper mit den halben Perioden übergegangen wurde, der mit dem ursprünglichen isomorph ist. Das Verfahren führt außerdem zu einer birationalen Transformation von $a\xi^4 + b\xi^2 + c = e\eta^2$ in die Weierstraßsche Normalform, mittels deren alle zu (2) äquivalenten Gleichungen (1) angegeben werden können, falls das Problem 1. für gewisse endliche Gleichungen gelöst ist. Damit ist auch der Zusammenhang zwischen 1. und 3. hergestellt. Um 2. mit 1. und 3. in Verbindung zu bringen, werden die Formeln für das Additionstheorem in x, y, z aufgestellt und dazu benutzt, eine homomorphe Abbildung des Lösungsmoduls auf die Gruppe der Quadratrestklassen der den Lösungen durch (5) zugeordneten Zahlen s herzustellen. Daran schließt sich ein Beweis des Mordellschen Satzes, der insofern konstruktiv ist, als er eine Basis des Lösungsmoduls liefert, falls je eine Lösung der lösbaren unter den Gleichungen (4) und (5) bekannt ist und sonst wenigstens ein Existenzbeweis ist. Die Anzahl der Basiselemente unendlicher Ordnung ist $\varrho_1 + \varrho_2 - 2$, wenn 2^{ϱ_1} die Anzahl der lösbaren Gleichungen (4), 2^{ϱ_2} die Anzahl der lösbaren Gleichungen (5) ist. Alle Überlegungen bleiben mit geringen Abänderungen gültig, wenn ein algebraischer Zahlkörper zugrunde gelegt wird. Da jede Gleichung vom Geschlechte 1 birational in die Form $a\xi^4 + b\xi^2 + c = e\eta^2$ transformiert werden kann, wenn dem Zahlkörper passende algebraische Zahlen adjungiert werden, so ergeben sich aus dem obigen entsprechende Tatsachen über beliebige diophantische Gleichungen vom Geschlechte 1, wenn ein Verfahren bekannt ist, aus den Lösungen in einem Erweiterungskörper die schon im Grundkörper liegenden auszusondern. Ein solches Verfahren wird angegeben; es führt die Aussonderung einer Basis des Lösungsmoduls aus einer als bekannt angenommenen Basis der Lösungen im Erweiterungskörper auf die Lösung eines Systems von linearen Gleichungen und Kongruenzen zurück, das für die Koeffizienten gilt, mittels deren sich die gesuchten Basiselemente durch die bekannten ausdrücken.

Deuring (Jena).

Zahlentheorie:

Ostmann, Hans-Heinrich: Über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen. Deutsche Math. 5, 177—212 (1940).

Die Arbeit liefert einen Beitrag zu dem bekannten, noch ungelösten Problem der additiven Zahlentheorie, ob die Dichte der Summe zweier Mengen natürlicher Zahlen \geq der Summe der Dichten der Summanden ist. Verf. erreicht mit neuen, aber — gleich den bisher auf diesem Gebiet benutzten — elementaren Hilfsmitteln eine Einengung des Problems. Es seien \mathfrak{N} die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Teilmengen von \mathfrak{N} , $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ihre Dichten, \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{D} Vereinigungsmenge bzw. Durchschnitt von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{B} + \mathfrak{D}$, γ bzw. γ' die Dichte von \mathfrak{C} bzw. \mathfrak{C}' , $M(x, y)$ mit $0 \leq x \leq y$ (x, y ganz) für eine beliebige Teilmenge \mathfrak{M} von \mathfrak{N} die Anzahl der positiven Elemente m von \mathfrak{M} mit $x \leq m \leq y$, $M(n) = M(1, n) = M(0, n)$, $M(0) = 0$. Neben diesen bekannten Begriffen benutzt Verf. wesentlich zwei neue

Größen, σ und j , die folgendermaßen definiert sind: Es ist

$$\sigma = \inf \frac{A(n) + B(n)}{n} \quad \left(n = 0, 1, 2, \dots; \frac{A(0) + B(0)}{0} = 1 \right).$$

Bedeutet ferner $J(n) = A(n) + B(n) - n$, so ist entweder $J(n) \geq 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ (Fall 1), oder es gibt eine kleinste Zahl $n = j$ (≥ 3) so, daß $J(j) = -1$ ist (Fall 2). Offenbar ist $\gamma \geq \gamma'$ und $1 \geq \sigma \geq \alpha + \beta$ für $\alpha + \beta \leq 1$. Das Hauptziel der Arbeit ist, hinreichende Bedingungen für die Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zu finden, so daß $\gamma \geq \alpha + \beta$ ist. Das Ergebnis sind mehrere Gruppen von hinreichenden Bedingungen sogar für die Gültigkeit von $\gamma' \geq \sigma$, falls $\sigma < 1$ ist. Dabei wird gleichzeitig für die nicht miteinbegriffenen Mengen die Abschätzung $\gamma = \gamma' = \sigma = 1$ (im Fall 1) bzw.

$\gamma' \geq \sigma - \frac{1}{j+2}$ (im Fall 2) bewiesen. Die hieraus sich ergebende Abschätzung

$$(1) \quad \gamma \geq \gamma' \geq \sigma - \frac{1}{j+2} \geq \alpha + \beta - \frac{1}{j+2}$$

läßt sich noch dadurch verbessern, daß γ', σ und j allein durch \mathfrak{B} und \mathfrak{D} bestimmt sind (denn es ist $A(n) + B(n) = V(n) + D(n)$ für jedes n), so daß man für $\alpha + \beta$ in (1) die obere Grenze aller $(\alpha + \beta)$ -Werte nehmen kann, die man bei Betrachtung der Gesamtheit aller mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ in Durchschnitt und Vereinigungsmenge übereinstimmenden Mengenpaare erhält. Das wichtigste Hilfsmittel für den Beweis ist der folgende Satz: Zu gegebenen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ läßt sich stets eine nur von \mathfrak{B} und \mathfrak{D} abhängende Menge $\mathfrak{Z} = \{z_0, z_1, \dots, z_\kappa, \dots\}$ ($z_\kappa < z_{\kappa+1}$) aus \mathfrak{D} konstruieren, so daß für \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' gilt:

$$(2) \quad \frac{C(z_\kappa, n)}{N(z_\kappa, n)} \geq \frac{C'(z_\kappa, n)}{N(z_\kappa, n)} \geq \sigma - \frac{\varepsilon}{j + \kappa} \geq \alpha + \beta - \frac{1}{j + \kappa}$$

($n = z_\kappa, z_\kappa + 1, z_\kappa + 2, \dots; \kappa = 0, 1, 2, \dots; \varepsilon = 0$ oder 1).

Hieraus folgt (1) sehr leicht. Der Beweis von (2) erfordert langwierige Betrachtungen. Die Menge \mathfrak{Z} erhält man aus einer Einteilung von \mathfrak{N} in bezug auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ in Intervalle $\mathfrak{Z}_k = [\bar{j}_k, \bar{j}_k]$ mit $\bar{j}_{k+1} = \bar{j}_k + 1$ und \bar{j}_k als kleinster Zahl n , für die $J(n) = -(k-1)$ ist, und Weiterteilung der Intervalle \mathfrak{Z}_k in sog. Hauptunterintervalle $\mathfrak{Z}_{\kappa\nu}$ (enthält mindestens ein Element von \mathfrak{D}) und Nebenunterintervalle (ist elementfremd zu \mathfrak{D}) durch folgende Festsetzung: $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 =$ dem linken Endpunkt des ersten der nach wachsenden Intervallanfängen geordneten Hauptunterintervalle, dessen Länge $> \bar{j}_2$ ist, allgemein z_κ der Anfang des ersten Hauptunterintervalls rechts von $z_{\kappa-1}$, dessen Länge größer als die Länge aller vorhergehenden Hauptunterintervalle ist, solange sich das Verfahren fortsetzen läßt. Hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von $\gamma' \geq \sigma$ sind z. B.: I. Ist für jedes Hauptunterintervall $\mathfrak{Z}_{\kappa\nu} = [\bar{j}_{\kappa\nu}, \bar{j}_{\kappa\nu}]$ entweder $D(\bar{j}_{\kappa\nu}, \bar{j}_{\kappa\nu}) \leq D(\bar{j}_1, \bar{j}_1)$ oder $N(\bar{j}_{\kappa\nu}, \bar{j}_{\kappa\nu}) \leq j$, so ist $\gamma' \geq \sigma$. II. Für die Gültigkeit von $\gamma' \geq \sigma$ ist hinreichend, daß die Hauptunterintervalle $\mathfrak{Z}_{\kappa\nu}$, für die \bar{j}_κ endlich ist, wenigstens eine der beiden Eigenschaften von I. besitzen. Ist andernfalls \mathfrak{Z}_{κ_0} das erste \mathfrak{Z} -Intervall, das mindestens ein Hauptunterintervall enthält, für das keine der beiden Eigenschaften zutrifft, ist aber für $\kappa \geq \kappa_0$ stets $N(\bar{j}_\kappa, \bar{j}_\kappa) \geq j$, so gilt ebenfalls $\gamma' \geq \sigma$. Außerdem werden zwei weitere hinreichende Bedingungen dieser Art abgeleitet. — Einige Druckfehler müssen noch korrigiert werden. *Rohrbach* (Berlin-Nikolassee).

Bang, A. S.: Über Zahlen der Form $a^x \pm b$, wobei a zu b prim ist. *Mat. Tidskr. B* 1940, 21—24 [Dänisch].

Die Gesamtheit der Zahlen $a^x \pm b$ (a, b natürliche Zahlen, $a > 1, (a, b) = 1; x = 1, 2, \dots$) wird in vier Klassen eingeteilt: $a^{2^y} + b, a^{2^y} - b, a^{2^y+1} + b, a^{2^y+1} - b$. Verf. beweist elementar: Geht die ungerade Primzahl p in einer Zahl einer dieser Klassen auf, so geht p in Zahlen von zwei und nur zwei dieser Klassen auf. *H. L. Schmid*.

Carlomusto, Saturno: Equazioni che derivano dal prodotto di n numeri consecutivi, interessanti e rapide formule risolutive. *Riv. Fis. Mat. Sci. Nat.* 14, 413—421 (1940).

Ist $a = x(x+1) \dots (x+n-1)$ das Produkt n aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, so kann x in der Form $x = \sqrt[n]{a} - m_n$ angegeben werden. Im allgemeinen wird m_n mit x veränderlich sein. Für $n = 2, 3, \dots, 8$ hat m_n konstante Werte (außer für $n = 6, x = 1$), die Verf. angibt. *Werner Schulz* (Berlin).

Billing, G.: A diophantine equation with seven solutions. Ark. Mat. Astron. Fys. 27 A, Nr 14, 1—7 (1940).

Es bezeichne n die genaue Anzahl der rationalen Lösungen einer ebenen Kurve vom Geschlecht 1. Mehrere Verff. haben gezeigt, daß die Fälle $n = 11, 14, 20, 24$ und 32 stets unmöglich sind, während sie Beispiele für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ und 12 angegeben haben (der Fall $n = 16$ ist noch nicht erledigt, wie Verf. angibt). Die obigen Resultate werden in dieser Arbeit durch das Beispiel einer Kurve vom Geschlecht 1 mit $n = 7$ vervollständigt, nämlich der Kurve $x_2^2 x_3 = x_1^3 - 43 x_1 x_2^2 + 166 x_3^3$ in homogenen Koordinaten, welche genau die rationalen Lösungen $(0, 1, 0)$, $(3, \pm 8, 1)$, $(-5, \pm 16, 1)$ und $(11, \pm 32, 1)$ hat. Es ist dem Ref. bekannt, daß Verf. diese Kurve durch eine Methode von Mahler und Billing [J. London Math. Soc. 15, 32—43 (1940); Referat folgt später] konstruiert hat. Bergström (Uppsala).

Bang, A. S.: Über Zahlen, die als Summe von drei oder vier Kubikzahlen geschrieben werden können. Mat. Tidsskr. B 1940, 25—42 [Dänisch].

Verf. vermutet, daß jede ganze Zahl als Summe von vier oder weniger Kubikzahlen geschrieben werden kann. Er bekräftigt diese Vermutung an Hand eines umfangreichen Beispielmateri als. Im einzelnen wird gezeigt: Jede Zahl $a \equiv 4, 5 \pmod{9}$ kann nicht als Summe von drei Kubikzahlen geschrieben werden. Dagegen kann jede solche Zahl $a < 100$ auf unendlich viele Arten als Summe von vier Kubikzahlen dargestellt werden (mit Ausnahme der Zahlen 23, 31 und 50, für welche der Satz nicht bewiesen ist). Für Zahlen $a \equiv 4, 5 \pmod{9}$ und $a \leq 101$ wird an Hand einer Tabelle gezeigt, daß jede solche Zahl als Summe von vier (oder weniger) Kubikzahlen geschrieben werden kann. Da kein Satz allgemeiner Art bewiesen wird, erscheint dem Ref. die ausgesprochene Vermutung noch unberechtigt. H. L. Schmid (Berlin).

Hua, Loo-keng: On Waring's problem for fifth powers. Proc. London Math. Soc., II. s. 45, 144—160 (1939).

Hauptsatz: $G(5) \leq 28$ (d. h. jede große ganze Zahl n ist als Summe von 28 nicht-negativen fünften Potenzen darstellbar). Es wird zunächst mit analytischer Methode bewiesen: ist n hinreichend groß, $\frac{1}{2}n^{1/4} < N < n^{1/4}$ (N ganz), so gibt es ganze x_i, y_j mit $n = \sum_{i=1}^{15} x_i^5 + 10 \sum_{j=1}^6 (y_j^4 + 2N^2 y_j^2)$, $0 < y_j \leq \frac{1}{2}n^{1/4}$, $x_i \geq 0$ (es handelt sich im wesentlichen um die Vinogradovsche Methode, mit Weylschen Abschätzungen auf den minor arcs). Eine von E. Landau herrührende und auch von R. D. James (dies. Zbl. 9, 54) benutzte Schlußweise führt dann zum Hauptsatz. Etwas früher als Hua hat T. Estermann $G(5) \leq 29$ bewiesen (dies. Zbl. 18, 52). — Einige Druckfehler: auf S. 152, Z. 3 lies $a_{r+1}(\frac{1}{2}Q/q)$ und $a_{r+1}(0)$; auf Z. 4: $a_r(t)$, auf Z. 5: $f(v)$. Im Lemma 3 · 3 fehlt bei V, V^* der Index 0. Auf S. 154, Z. 6 v. u. und auf S. 155 lies $Q^{-7/2}$ statt $P^{-7/2}$. Im Lemma 4 · 7 und auf S. 159, Z. 5 ersetze man \leq durch \geq . Als Ordnung der Farey-reihen auf S. 153, 155 soll $Q^{3+\varepsilon}$, $P^{4+\varepsilon}$ gewählt werden, sonst kann man Lemma 3 · 2 und 3 · 3 nicht direkt anwenden. Jarník (Prag).

Pillai, S. S.: On Waring's problem with powers of primes. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 9, 29—34 (1939).

Es sei $G_1(k)$ das kleinste s , so daß sich jedes hinreichend große N als Summe von höchstens s k -ten Primzahlpotenzen darstellen läßt. Dann ist $G_1(k) < (6 + o(1))k \log k$. Beweis: Es sei $k \geq 4$, $K = \frac{1}{2}(3 + (-1)^k) \prod_{p-1/k} p^{o+1}$, wo p^o die höchste Potenz von p ist, die in k aufgeht. P sei die kleinste nicht in K aufgehende Primzahl. Verf. zeigt elementar: Es gibt eine Zahl $t = t(k) \leq 9 \sum_{d|k} d + 4k = o(k \log k)$, so daß die Kongruenz $N \equiv x_1^k + \dots + x_t^k \pmod{K}$ (mit $x = 0$ oder P oder p/K) für jedes N lösbar ist. Nach Hua (dies. Zbl. 20, 105 und 17, 389) gibt es ein $s_0 = s_0(k) \sim 6k \log k$, so daß sich jedes große $N \equiv s_0 \pmod{K}$ als Summe von genau s_0 k -ten Primzahlpotenzen darstellen läßt. Offenbar ist $G_1(k) \leq s_0 + t$, woraus das Resultat folgt. — In Lemma 3

lies mod d_s statt mod p_s . In Lemma 6 ersetze man 4,5 durch 9, da ein Teiler von k eventuell auf zwei Arten in der Gestalt $(p-1)p^\theta$ ($\theta \geq 0$) geschrieben werden kann.
Jarník (Prag).

Erdős, P.: The difference of consecutive primes. Duke math. J. 6, 438—441 (1940).

Let p_n denote the n -th prime, and let $A = \liminf \frac{p_{n+1} - p_n}{\log n}$. Hardy and Littlewood proved a few years ago, by using the Riemann Hypothesis (= R. H.) that $A \leq \frac{2}{3}$ (not yet published), and R. A. Rankin [Proc. Cambridge Philos. Soc. 36, 255—266 (1940)] recently proved, again by using R. H. that $A \leq \frac{3}{8}$. Depending on Brun's method the author proves without R. H. that $A < 1 - c$ for a certain $c > 0$. Denote by $q_1 < q_2 < \dots < q_y$ the primes not exceeding n . Then the author enunciates the following conjecture: $\sum_{i=1}^{y-1} (q_{i+1} - q_i)^2 = O(n \log n)$. This is, if true, a stronger result than that of Cramér [Acta Arithmet. 2, 23—46 (1936); this Zbl. 15, 197].
S. Ikehara (Osaka).

Ingham, A. E.: On two classical lattice point problems. Proc. Cambridge Philos. Soc. 36, 131—138 (1940).

Es sei $r(n)$ die Anzahl der Darstellungen $n = x^2 + y^2$, $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n . Für die Gitterreste $P(x) = \sum_{0 \leq n \leq x} r(n) - \pi x$, $\Delta(x) = \sum_{0 < n \leq x} d(n) - x \log x - (2\gamma - 1)x$ ist u. a. folgendes bekannt (für $x \rightarrow \infty$):

- (1) $\liminf P(x)(x \log x)^{-1/4} < 0$, (2) $\limsup P(x)x^{-1/4} > 0$,
(3) $\limsup \Delta(x)(x \log x)^{-1/4} (\log \log x)^{-1} > 0$, (4) $\liminf \Delta(x)x^{-1/4} < 0$

[vgl. z. B. G. H. Hardy, On Dirichlet's divisor problem, Proc. London Math. Soc. (2), 15, 1—25 (1916); E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie II; Leipzig: Hirzel 1927]. Verf. verbessert (2), (4) zu (5) $\limsup P(x)x^{-1/4} = +\infty$, (6) $\liminf \Delta(x)x^{-1/4} = -\infty$. Der recht einfache Beweis von (5) beruht auf der Berechnung von

$\int_{\omega-\eta}^{\omega+\eta} UK(U(u-\omega))u^{-1/2}P(u^2)du$, wo $U > 0$, $\omega \geq 2\eta > 0$, $K(y) = \left(\frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}\right)^2$; dabei hat das Hauptglied die Gestalt $-2 \sum_{0 < n < X} \frac{r(n)}{n^{3/4}} \left(1 - \frac{n^{1/2}}{X^{1/2}}\right) \cos(2\pi n^{1/2}\omega + \frac{1}{4}\pi)$, wo

$X = \frac{1}{4}U^2\pi^{-2}$. Die Anwendung des Dirichletschen Satzes [man wählt ω so, daß alle $n^{1/2}\omega$ ($n < X$) angenähert ganz sind] führt zu (1); die Anwendung des Kroneckerschen Satzes [man wählt ω so, daß alle $2q^{1/2}\omega$ ($q < X$ quadratfrei) angenähert ungerade Zahlen sind] führt zu (5). — Ein allgemeiner Satz, in welchem die (für die Anwendbarkeit des Kroneckerschen Satzes wichtige) lineare Unabhängigkeit der Zahlen $q^{1/2}$ (q quadratfrei) enthalten ist, soll von Besicovitch in J. London Math. Soc. bewiesen werden. — Analog verläuft der Beweis für $\Delta(x)$.
Jarník (Prag).

Gruppentheorie.

Kondō, Kōiti: Table of characters of the symmetric group of degree 14. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 585—593 (1940).

L'autore, giovandosi di un procedimento introdotto recentemente da Nakayama (On some modular properties of irreducible representations of symmetric groups. I. Jap. J. Math. 1940) calcola la tabella dei caratteri del gruppo simmetrico di grado 14. Per i gruppi simmetrici di grado ≤ 13 , le tabelle dei caratteri sono già conosciute (Littlewood e Richardson, questo Zbl. 9, 202; Littlewood, questo Zbl. 11, 250; Zia-ud-Din, questo Zbl. 11, 249 e 15, 392).
Zappa (Roma).

Kulakoff, A.: Einige Bemerkungen zur Arbeit: „Form of the number of the subgroups of a prime power group“ von G. A. Miller. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 73—75 (1940).

Es wird auf einige Lücken im Beweis eines Satzes von G. A. Miller (Proc. Nat.

Acad. Sci. U. S. A. 1923, 237—238) aufmerksam gemacht und ergänzend bewiesen: Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung p^m (p Primzahl, $m \geq 3$), dann ist 1. die Anzahl der Untergruppen mit zyklischer Faktorgruppe der Ordnung p^μ ($1 < \mu < m$) durch p teilbar; 2. die Anzahl aller Untergruppen H_α der Ordnung p^α ($1 \leq \alpha \leq m-2$) mit zyklischer Faktorgruppe N_α/H_α durch p teilbar, wo N_α der Normalisator von H_α in G ist.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Dubuque, P.: Sur l'invariance des sous-groupes d'un groupe fini. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 285—297 u. franz. Zusammenfassung 297—300 (1940) [Russisch].

Mit der bekannten Methode der monomialen Darstellungen werden wieder viele Sätze über die Existenz eigentlicher Normalteiler endlicher Gruppen bewiesen, z. B. Satz 10: Wenn in einer p -Sylowgruppe \mathfrak{P} des Normalisators \mathfrak{U} der von dem Elemente A erzeugten zyklischen Gruppe mit der Ordnung p^k jedes mit A^z unter der ganzen Gruppe \mathfrak{G} konjugierte Element die Form $A^{(1+m p)^z}$ (z beliebig) hat und wenn A nicht in der Kommutatorgruppe \mathfrak{P}' von \mathfrak{P} liegt, so enthält \mathfrak{G} einen echten Normalteiler von p -Potenzindex. Die vom Verf. angegebene zusätzliche Voraussetzung im Fall $p=2$ sowie die Begriffsbildung der Quasinormalisatoren ist für den Beweis des Satzes unnötig. Denn die gemachten Voraussetzungen ergeben durch direkte Rechnung für die Verlagerung des Elementes A von \mathfrak{G} in \mathfrak{P} die Kongruenz

$$V_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{P}}(A) \equiv A^{\mathfrak{U}: \mathfrak{P} + np} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}'},$$

Zassenhaus (Hamburg).

Hall, P.: Verbal and marginal subgroups. J. reine angew. Math. 182, 156—157 (1940).

Verschiedene vom Autor früher (dies. Zbl. 7, 291) hergeleitete Sätze werden zusammengefaßt und verallgemeinert durch folgende Begriffsbildungen: Ist $f(x_1, \dots, x_n)$ ein Wort, d. h. ein Potenzprodukt der x_i und ihrer Inversen, so bilden alle Werte $f(a_1, \dots, a_n)$ des Wortes für a_i in G eine charakteristische Untergruppe $V_f(G)$ der Gruppe G . Andererseits bilden die ξ in G , für die stets $f(a_1, \dots, a_n) = f(a_1 \xi, a_2, \dots, a_n) = f(a_1, a_2 \xi, \dots, a_n) = \dots = f(a_1, a_2, \dots, a_n \xi)$ gilt, eine charakteristische Untergruppe $M_f(G)$. Es gilt der Vertauschungssatz: Ist die Kommutatorgruppe $[\xi, G]$ enthalten in $M_f(G)$, so ist ξ enthalten im Zentralisator V_f^* von $V_f(G)$. Insbesondere ist $[V_f, M_f] = 1$. Es gilt $[V_f, V_g] = V_{[f, g]}$; analog ist $M_{[f, g]}$ der Durchschnitt von zwei Gruppen A und B , die durch

$$A/V_g^* = M_f(G/V_g^*), \quad B/V_f^* = M_g(G/V_f^*)$$

definiert sind. Sind die Wörter h_i speziell durch

$$h_1 = x_1, \quad h_{i+1} = [h_i, x_{i+1}] = h_i^{-1} x_{i+1}^{-1} h_i x_{i+1}$$

definiert, so bilden die Gruppen $V_{h_i}(G) = H_i$ die untere, die $M_{h_i} = Z_{i-1}$ die obere Zentralreihe von G . Im Fall einer p -Gruppe ist weiter der Fall $f = x^{p^k}$ von Interesse.

van der Waerden (Leipzig).

Dietzmann, A. P.: Einige Sätze über unendliche Gruppen. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 63—67 (1940) [Russisch].

Das Produkt $a_\alpha^{\varepsilon_\alpha} \dots a_\kappa^{\varepsilon_\kappa} a_\lambda^{\varepsilon_\lambda} \dots a_\omega^{\varepsilon_\omega}$ ($\varepsilon_\nu = \pm 1$), worin die Elemente a_ν einer abgezählten Klasse konjugierter Elemente a_1, a_2, a_3, \dots angehören, möge im Falle $\kappa > \lambda$ umgeformt werden in $a_\alpha^{\varepsilon_\alpha} \dots a_\lambda^{\varepsilon_\lambda} a_{\kappa'}^{\varepsilon_{\kappa'}} \dots a_\omega^{\varepsilon_\omega}$, wobei $a_{\kappa'} = a_\lambda^{-\varepsilon_\lambda} a_\kappa a_\lambda^{\varepsilon_\lambda}$ gesetzt ist. Nach endlich vielen Umformungen dieser Art und nachheriger Zusammenfassung in Potenzen nimmt das Produkt die Gestalt $a_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} a_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} \dots a_{i_r}^{\varepsilon_{i_r}}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ an. Demnach erzeugt eine Klasse konjugierter Elemente mit endlich vielen Elementen endlicher Ordnung stets eine endliche Untergruppe (Satz 1 und Folgerung). Lemma 4: Wenn in einer p -Gruppe der Index einer Untergruppe endlich ist, so ist er eine p -Potenz. Denn die Permutationen der zugehörigen transitiven Darstellung bilden eine endliche p -Gruppe. Es folgt, daß die Anzahl der Mitglieder einer endlichen Klasse konjugierter Elemente in einer p -Gruppe stets eine p -Potenz ist. Durch Betrachtung der Klassen-

gleichung ergibt sich dann Satz 4: Jeder endliche, von 1 verschiedene Normalteiler einer p -Gruppe enthält ein von 1 verschiedenes Zentrums-Element der ganzen Gruppe.

Zassenhaus (Hamburg).

Hall, P.: The construction of soluble groups. J. reine angew. Math. 182, 206—214 (1940).

Das allgemeine Aufbauprinzip, das dieser Arbeit zugrunde liegt, ist das folgende: Ist eine Gruppe G das Produkt aus einem Normalteiler N und einer Untergruppe D , so ist die Struktur von G bestimmt durch die Strukturen von D und N und durch die Art, wie N durch die Elemente von D in sich transformiert wird. Durch dieses Aufbauprinzip werden die lästigen Faktorensysteme vermieden. — Ein Sylowsystem einer auflösbaren Gruppe H der Ordnung $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ ist ein System von Untergruppen S_1, S_2, \dots, S_r , derart, daß $(H:S_i) = p_i^{\alpha_i}$ ist. Ist nun H ein Normalteiler von G und ist S_1, \dots, S_r ein Sylowsystem in H , so wird der Systemnormalisator $M_G(H)$ definiert als die Gesamtheit der Elemente μ von G , die mit S_1, S_2, \dots, S_r vertauschbar sind. Ist nun N ein in H enthaltener Normalteiler und ist H/N nilpotent, so wird gezeigt, daß $G = ND$ mit $D = M_G(H)$ gilt. — Die untere Nilreihe (lower nilpotent series) $L_0, L_1, \dots, L_n = 1$ von G wird so definiert: $L_0 = G$, und L_i ist der kleinste Normalteiler von L_{i-1} mit nilpotenter Faktorgruppe. Zur Anwendung des vorigen Satzes kann man dann $H = L_{i-1}$ und $N = L_i$ wählen. Die Bedingungen werden angegeben, die D und N zu erfüllen haben, damit in der Produktgruppe $G = DN$ wirklich $N = L_i$ und $D = M_G(L_{i-1})$ ausfällt. Zum Schluß wird der besondere Fall der A -Gruppen, deren sämtliche Sylowgruppen abelsch sind, diskutiert.

van der Waerden (Leipzig).

Baer, Reinhold: Nilpotent groups and their generalizations. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 393—434 (1940).

Mehrere Eigenschaften beliebiger Gruppen \mathfrak{G} , die im Falle der Endlichkeit von \mathfrak{G} gleichwertig mit der Zerlegbarkeit von \mathfrak{G} in das direkte Produkt der p -Sylowgruppen sind, werden bezüglich ihrer logischen Abhängigkeit voneinander untersucht, unter anderen: (1) Existenz einer Ordinalzahl α , so daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{z}_\alpha(\mathfrak{G}) = \mathfrak{z}_\alpha$. Dabei wird durch transfinite Rekursion definiert: $\mathfrak{z}_0 = 1$, $\mathfrak{z}_{\alpha+1}/\mathfrak{z}_\alpha$ gleich dem Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{z}_\alpha$, für Limeszahlen aber \mathfrak{z}_α gleich der Vereinigungsgruppe aller \mathfrak{z}_μ mit $\mu < \alpha$. Kurz gesagt wird gefordert, daß die aufsteigende Zentralreihe bis zur ganzen Gruppe aufsteigt. Dual zu (1) ist (1'): Existenz einer Ordinalzahl λ , so daß $\mathfrak{z}_\lambda = \mathfrak{z}_\lambda(\mathfrak{G}) = 1$ ist. Dabei ist $\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{z}_{\alpha+1}$ die aus allen Kommutatoren $xyx^{-1}y^{-1}$ mit x aus \mathfrak{G} , y aus \mathfrak{z}_α erzeugte Untergruppe und für Limeszahlen als Index \mathfrak{z}_α der Durchschnitt aller \mathfrak{z}_μ mit $\mu < \alpha$. Kurz: Die absteigende Zentralreihe steigt bis 1 ab. (2) \mathfrak{G} ist direktes Produkt von Gruppen, in denen die Ordnung jedes Elementes Potenz einer festen Primzahl p ist (p -Gruppen). (3) Jede maximale Untergruppe einer beliebigen Untergruppe \mathfrak{U} ist als Normalteiler in \mathfrak{U} enthalten. Am Schluß der Arbeit werden im ganzen 17 derartige Eigenschaften angegeben und eine Tafel der bisher bekannten Beziehungen zwischen ihnen aufgestellt. Der Begriff der auflösbaren endlichen Gruppe erfährt 3 Verallgemeinerungen. Ihnen gemeinsam ist die Forderung nach der Existenz einer aufsteigend wohlgeordneten Untergruppenkette $1 = \mathfrak{B}_0 \leq \mathfrak{B}_1 \leq \dots \leq \mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{G}$, so daß \mathfrak{B}_α Normalteiler von $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ mit abelscher Faktorgruppe ist. Gruppen, in denen diese Forderung erfüllt ist, heißen metazyklisch, denn durch Verfeinerung der \mathfrak{B}_α entsteht eine Kompositionskette mit lauter zyklischen Faktorgruppen. Wenn überdies die \mathfrak{B}_α Normalteiler der ganzen Gruppe sind, so heißt die Gruppe schwach auflösbar, und wenn außerdem die konsekutiven Faktorgruppen endlichen Rang haben, auflösbar. Dabei hat eine abelsche Gruppe endlichen Rang, wenn sie nur endlich viele linear unabhängige Elemente enthält, und wenn für jede Primzahl p die Gleichung $x^p = 1$ nur endlich viele Lösungen in der Gruppe hat. — In § 1 werden Hilfssätze bewiesen, unter anderen 1.9: Wenn in einer Gruppe mit abelschem Normalteiler und zyklischer Faktorgruppe (3) gilt, so liegt in diesem Normalteiler ein von 1 ver-

schiedenes Zentrumselement der ganzen Gruppe. Der Beweis geschieht durch einen bemerkenswerten Schluß von Primzahlcharakteristik auf 0. In §2 wird bewiesen, daß (1) im Falle der Auflösbarkeit gleichwertig mit (3) ist. Ferner wird am Beispiel der Gruppe: $b_0 = 1$, $b_i^p = b_{i-1}$, $g b_i g^{-1} = b_i^{1+p}$ (p Primzahl, $i > 0$) gezeigt, daß aus (1) nicht (1') folgt, und am Beispiel der Gruppe $b_i b_j = b_j b_i$, $g b_i g^{-1} = b_{i+1}$, $b_i^p = 1$ (p Primzahl oder 0, i ganzzahlig), daß aus (1') und (3) nicht (1) folgt. §3: In Gruppen mit lauter Elementen endlicher Ordnung ist (1) im Falle der Auflösbarkeit mit (2) gleichwertig. Dagegen wird in 3.4 eine schwach auflösbare p -Gruppe konstruiert, deren Zentrum 1 ist, nämlich: $u(j)^p = 1$, $u(j) u(k) = u(k) u(j)$, $b(i) u(j) = u(j) b(i)^{r(j)}$, $b\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i p^i\right)^{r(j)} = b\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j} p^i\right)$, wobei $0 < j$, $0 \leq i$, $0 \leq c_i < p$, c_i für fast alle i gleich 0, $c_{i,j} = c_i$ für $i \neq j-1$; $c_{j-1,j}$ gleich $c_{j-1} + 1$ oder gleich 0, je nachdem $c_{j-1} < p-1$ oder $c_{j-1} = p-1$ ist. Eine Gruppe, die sich aus endlich vielen Elementen von endlicher Ordnung erzeugen läßt, ist endlich, wenn sie schwach auflösbar ist und Eigenschaft (3) besitzt. Ref. bemerkt, daß „schwach auflösbar“ durch „metazyklisch“ ersetzt werden darf. Ob die Auflösbarkeitsforderung überhaupt fehlen darf, ist bisher nicht bekannt. §4: Nach 4.1 genügt es, die in (3) enthaltene Forderung an die Untergruppen von \mathfrak{G} nur für die aus endlich vielen Elementen erzeugten nachzuprüfen und für diese Untergruppen ist sie nach 4.8 gleichwertig mit der Eigenschaft, daß die Φ -Untergruppe die Kommutatorgruppe enthält. Nach 4.4 folgt (1) aus (3), wenn zusätzlich die Existenz einer Kompositionskette mit lauter zyklischen Faktoren von einer Länge, die höchstens gleich der ersten Limeszahl ist, vorausgesetzt wird. — Alle Elemente einer Gruppe \mathfrak{G} , welche jede Untergruppe von \mathfrak{G} auf sich selbst transformieren, bilden eine charakteristische Untergruppe $N(\mathfrak{G})$, die Norm von \mathfrak{G} . $N(\mathfrak{G})$ ist entweder abelsch oder hamiltonsch. Neben der aufsteigenden Zentralreihe wird in §4 die aufsteigende Normenreihe betrachtet: $N_0 = N_0(\mathfrak{G}) = 1$, $N_{\alpha+1}/N_\alpha = N(\mathfrak{G}/N_\alpha)$, für Limeszahlen N_α gleich der Vereinigungsgruppe aller N_μ mit $\mu < \alpha$. Aus (1) folgt stets die Existenz einer Ordinalzahl ρ , so daß $N_\rho(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. Die Umkehrung gilt sicher dann, wenn sich die Gruppe aus endlich vielen Elementen erzeugen läßt. Ob sie allgemein gilt, wird nicht entschieden. In §5 werden die 3 Eigenschaften behandelt: (4) Wenn $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{B} \leq \mathfrak{G}$ und zwischen \mathfrak{U} und \mathfrak{B} höchstens eine Untergruppe liegt, so ist \mathfrak{U} Normalteiler von \mathfrak{B} . (5) Jede Untergruppe ist Normalteiler. (6) Keine Faktorgruppe einer Untergruppe ist isomorph zu irgendeiner Gruppe der Eigenschaft 3 mit den Relationen: $w^p = c^p = 1$, $uc = cu$, $vc = cv$, $v^p = c^e$, $c = uvu^{-1}v^{-1}$ (p beliebige Primzahl). Nach 6.3 bzw. 6.5 sind die 3 Eigenschaften einander äquivalent, wenn jedes Element endliche Ordnung hat bzw. wenn (1) gilt. Ob sie immer einander äquivalent sind, wird nicht entschieden. Klar ist, daß (4) aus (5) und (6) aus (4) folgt.

Zassenhaus (Hamburg).

Kulakoff, A.: Über die reguläre Darstellung einer abstrakten Gruppe. 5. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 69—72 (1940).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (dies. Zbl. 17, 155; 18, 10, 392; 20, 295) wird die reguläre Darstellung einer Gruppe untersucht. Es werden die Formen einer Permutation Q der Ordnung k und einer damit vertauschbaren Permutation P der Ordnung p angegeben und im abelschen Falle die Erzeugenden aufgestellt. Mit Hilfe der nichtzyklischen Sylowuntergruppen der Ordnung p^α ($p > 2$) werden Sätze über die Ordnungen gewisser Elemente bewiesen.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Grushko, I.: Über die Basen eines freien Produktes von Gruppen. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 169—181 u. deutsch. Zusammenfassung 182 (1940) [Russisch].

Als zulässige Abänderung einer Basis g_1, g_2, \dots, g_m wird eine Abänderung

$$g_i \rightarrow g'_i = \prod g_{j_k}^{\varepsilon_k} \quad (\varepsilon_k = \pm 1) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

bezeichnet, die in der freien Gruppe aus den m Erzeugenden g_i wieder ein Erzeugendensystem liefert. Ausführlich wird bewiesen, daß jede endliche Basis eines freien Produktes aus endlich vielen Gruppen nach geeigneter zulässiger Abänderung in eine

Basis übergeht, deren sämtliche Elemente schon in den Faktoren des freien Produktes liegen. Zassenhaus (Hamburg).

Opechowski, W.: Sur les groupes cristallographiques „doubles“. Physica, Haag 7, 552—562 (1940).

Zu den zweideutigen Darstellungen der Drehungsgruppe d_3 gehören auch zweideutige Darstellungen der endlichen Untergruppen g von d_3 , d. h. der kristallographischen Gruppen. Sie sind sämtlich Darstellungen von „doppelten Gruppen“ g^\dagger , die so erhalten werden: In der zweideutigen Darstellung $d_3 \rightarrow u_2$ entspricht jeder Gruppe g eine Gruppe g^\dagger von der doppelten Ordnung. Jeder Klasse konjugierter Elemente in g entsprechen im allgemeinen 2 Klassen in g^\dagger ; nur einer Klasse von Elementen der Ordnung 2 entspricht unter gewissen Bedingungen eine einzige. Die Darstellungen von g^\dagger sind nun erstens die eindeutigen Darstellungen von g , zweitens die neu hinzukommenden, „spezifischen“ Darstellungen von g^\dagger , in denen das Element $-E$ durch die Matrix $-E$ dargestellt wird (E = Einheitsmatrix). Mit Hilfe der Charakterenrelationen werden nun für den Fall der rhomboedrischen Gruppe und der Tetraedergruppe die Charaktere aller Darstellungen der doppelten Gruppe berechnet.

van der Waerden (Leipzig).

Fokker, A. D.: Les phénomènes propres des milieux cristallins. 1. Physica, Haag 7, 385—412 (1940).

Es wird eine Art Darstellungstheorie der Kristallgruppen entwickelt, die weniger abstrakt sein soll als die offizielle Darstellungstheorie, die Bethe [Ann. Physik 3, 133 (1929)] und Wigner (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1930, 133) benutzen. Man kann die Theorie des Verf. in die Sprache der modernen Algebra übersetzen, auf Grund des folgenden Schlüssels: phénomène = Vektor eines Darstellungsmoduls; phénomène propre = Eigenvektor; opérateur = Element des Gruppenrings; crinon = idempotentes Zentrums-element; crinides = Elemente eines Ideals im Gruppenring. Gezeigt wird, wie man durch Multiplikation von Faktoren der Form $E + \zeta A + \zeta^2 A^2 + \dots + \zeta^{n-1} A^{n-1}$ unter Umständen die erzeugenden Elemente der einfachen Ideale des Gruppenrings und damit die Darstellungen der Gruppe erhalten kann. In allen abelschen und einigen nichtabelschen Fällen erhält man so alle irreduziblen Darstellungen.

van der Waerden (Leipzig).

Gáspár, Julius: Eine Verallgemeinerung der unendlichen Permutationsgruppen. Mitt. math. Semin. Univ. Debrecen H. 15, 1—34 u. dtsh. Zusammenfassung 35—41 (1940) [Ungarisch].

Eine Permutation der Nummern 1, 2, 3, ... kann durch eine unendliche Matrix dargestellt werden, die in jeder Spalte eine Eins und sonst nur Nullen enthält. Ersetzt man nun die Einser durch Elemente a_1, a_2, \dots einer Gruppe A , so erhält man eine verallgemeinerte Permutationsmatrix, die mit $(a; \pi)$ bezeichnet werden kann, wo a die Zeile (a_1, a_2, \dots) und π die fragliche Permutation bedeutet. Die Multiplikationsregel für diese Matrices heißt:

$$(a; \pi)(b; \varrho) = (ab_\pi; \pi\varrho).$$

Die Gesamtheit aller dieser Matrices ist eine verallgemeinerte unendliche Permutationsgruppe $S_\infty(A)$. Nun werden verschiedene Sätze über die Normalteiler und die möglichen Kompositionsreihen von $S_\infty(A)$ aufgestellt. Die Kompositionsreihen fangen so an: $S_\infty(A) > S(A) > P(A) > E(A)$, wobei $S(A)$, $P(A)$ und $E(A)$ dadurch definiert werden, daß die Permutationen π eingeschränkt werden auf solche, die nur endlich viele Nummern permutieren bzw. diese nach einer geraden Permutation permutieren, bzw. alle Nummern fest lassen. Insbesondere werden solche Gruppen A betrachtet, die nur eine einzige Kompositionsreihe besitzen. Das Zentrum von $S_\infty(A)$ wird bestimmt. Schließlich werden alle Automorphismen von $S_\infty(A)$ angegeben und auch die Meromorphismen behandelt.

van der Waerden (Leipzig).

Jacobson, N.: Structure and automorphisms of semi-simple Lie groups in the large. Ann. of Math., II. s. 40, 755—763 (1939).

Das Ziel dieser Arbeit ist, einige Lücken in der Literatur über die Beziehungen

zwischen Lieschen Gruppen und Lieschen Ringen auszufüllen. So wird bewiesen, daß die Liesche Gruppe \mathcal{G} dann und nur dann halbeinfach ist, wenn der Gruppenkeim, oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Liesche Ring halbeinfach ist, und entsprechend für Einfachheit. Alle einfachen Lieschen Gruppen mit 11 Ausnahmen sind im kleinen isomorph entweder zur reellen unimodularen, orthogonalen oder symplektischen (= Komplex-) Gruppe, oder zur komplexen unimodularen, orthogonalen, unitären oder symplektischen Gruppe, oder zur unitären oder symplektischen Quaternionenmatrixgruppe. Diese Liste ist etwas einfacher als die Cartansche. Schließlich werden alle Automorphismen dieser Gruppen angegeben. *van der Waerden* (Leipzig).

Suschkewitsch, A.: Groupes généralisés de quelques types des matrices infinies. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 16, 115—119 u. franz. Zusammenfassung 119—120 (1940) [Russisch].

Eine reelle Matrix mit abzählbar unendlich vielen Zeilen und Spalten heißt eigentlich linksseitig halborthogonal, wenn sich die Zeilenvektoren der Matrix durch Hinzufügen unendlich vieler weiterer Vektoren zu einer orthogonal normierten Basis des Hilbertschen Raumes ergänzen lassen. Die Gesamtheit dieser Matrizen bildet eine Halbgruppe, in der die Kürzungsregel: aus $AB = AC$ folgt $B = C$ und die uneingeschränkte Lösbarkeit der Gleichung $AX = B$ gelten. *Zassenhaus* (Hamburg).

Malcev, A.: Über die Einbettung von assoziativen Systemen in Gruppen. 2. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 251—263 u. deutsch. Zusammenfassung 263—264 (1940) [Russisch].

Für Teil I vgl. dies. Zbl. 22, 311. — Es sei \mathcal{N} eine Halbgruppe, \mathcal{G} eine Gruppe, welche \mathcal{N} enthält, und \mathcal{N} ein Normalteiler von \mathcal{G} . Wenn \mathcal{G} keine Untergruppen enthält, welche von \mathcal{G} verschieden sind und \mathcal{N} enthalten, so heißt \mathcal{G} eine minimale Erweiterung von \mathcal{N} . Enthält \mathcal{G} keinen nicht-trivialen Normalteiler derart, daß die Nebenklassen \mathcal{G}/\mathcal{N} nicht mehr als je ein Element aus \mathcal{N} enthalten, so heißt \mathcal{G} eine absolut-minimale Erweiterung von \mathcal{N} . Es gilt der Satz: In jeder minimalen Erweiterung \mathcal{G} einer Halbgruppe \mathcal{N} existiert ein Normalteiler \mathcal{M} , so daß \mathcal{G}/\mathcal{M} eine absolut-minimale Erweiterung von \mathcal{N} ist. — Ist \mathcal{N} ein assoziatives System, das durch seine definierenden Relationen gegeben ist und besitzt die Gruppe \mathcal{G} dieselben Erzeugenden und definierenden Relationen, so heißt \mathcal{G} Quotientengruppe von \mathcal{N} . Es gilt der Satz: Ist \mathcal{H} eine minimale Erweiterung und \mathcal{G} die Quotientengruppe von \mathcal{N} , so gibt es einen Normalteiler \mathcal{M} von \mathcal{G} so, daß $\mathcal{G}/\mathcal{M} \cong \mathcal{H}$ ist. Umgekehrt ist jede Gruppe \mathcal{G} mit dieser Eigenschaft die Quotientengruppe von \mathcal{N} . — Es sei S das System der definierenden Relationen von \mathcal{N} und \mathcal{G} . Jede Relation zwischen Potenzen der Erzeugenden mit positiven Exponenten, die in \mathcal{G} statthat, heißt eine Gruppenfolgerung aus S . Es werden Sätze über Systeme von Gruppenfolgerungen gegeben und Kriterien über die Einbettbarkeit eines assoziativen Systems in eine Gruppe ausgesprochen. — Nach dem Auszug referiert.

H. L. Schmid (Berlin).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Radó, T., and P. Reichelderfer: Cyclic transitivity. Duke math. J. 6, 474—485 (1940).

Zunächst wird folgender Begriff eingeführt: Eine in einer (beliebigen Grund-) Menge G definierte binäre, reflexive und symmetrische Relation \mathcal{R} heißt zyklisch-transitiv (z. t.), wenn aus $a, \mathcal{R}a_{v-1}$ mit $a_v \subset G$, $v = 1, \dots, n$, und $a_{n+1} = a_1$ folgt: $a, \mathcal{R}a_k$ für beliebige $j, k = 1, \dots, n$. Eine reflexive, symmetrische und (im gewöhnlichen Sinne) transitive Relation (g. T.) ist auch z. t.; aber i. a. nicht umgekehrt. An drei Beispielen aus der Topologie wird das Auftreten zyklisch-transitiver Relationen (z. T.) aufgezeigt. Es dreht sich dann vor allem um die Frage nach der „Erzeugung“ („Darstellung“) aller z. T. Eine solche Erzeugungsweise ist diese: Es sei gegeben ein System Γ (sog. \mathcal{P} -System) von Teilmengen von G mit folgenden Eigenschaften: \mathcal{P}_1 : Zu Γ gehören G , die leere und alle nur ein Element enthaltenden Teilmengen; \mathcal{P}_2 : Die Summe

beliebig vieler, zu Γ gehöriger Teilmengen \mathfrak{X} von G gehört wieder zu Γ , wenn der Durchschnitt der \mathfrak{X} nicht leer ist. Als Γ -Komponente einer beliebig vorgegebenen Teilmenge S von G sei bezeichnet eine größte, in S enthaltene, zu Γ gehörige Menge. Zwei Γ -Komponenten von S sind fremd oder identisch, und S ist Summe aller ihrer Γ -Komponenten. Man definiere nun: $a\Re b$, dann und nur dann, wenn für beliebiges x aus G mit $x \neq a$, $x \neq b$ die a und b beide je der gleichen Γ -Komponente von $G - x$ angehören. Dann ist \Re eine z. T. Daß umgekehrt jede z. T. auf diese Weise erzeugt werden kann, ist eines der Ergebnisse der Arbeit. Unter den Beweisgedanken sei folgender hervorgehoben: Im allgemeinen gibt es mehrere \mathfrak{B} -Systeme, welche (in G) die gleiche \Re erzeugen. Unter diesen gibt es ein, in gewissem Sinne kleinstes \mathfrak{B} -System $\Lambda = \Lambda(\Re)$. Dabei ist Λ definiert durch \mathfrak{B}_1 und folgende Eigenschaft: Sind a, b beliebige Elemente einer zu Λ gehörigen Teilmenge E von G , so gibt es endlich viele Elemente a_1, \dots, a_n aus E mit $a\Re a_1\Re a_2 \dots a_n\Re b$. — Im übrigen werden, anschließend an das eben Erwähnte, weitere Begriffe und Sätze behandelt, welche in gewissem Sinne Verallgemeinerungen zu den eingangs erwähnten topologischen Beispielen für z. T. darstellen. Hierzu muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *Haupt.*

Hornich, Hans: Über eine Zusammensetzung von Mengen. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 50, 105—111 (1940).

Es seien M_j , $j = 1, 2$, Teilmengen des euklidischen R_n der $x = (x_1, \dots, x_n)$. Mit $(M_1 M_2)$ werde bezeichnet die Menge aller $(x^{(1)} + x^{(2)}) \in R_n$, wo $x^{(j)} \in M_j$ und $x^{(1)} + x^{(2)} = (x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$. Es wird u. a. gezeigt: 1. Es ist $(M_1 M_2)$ zusammenhängend bzw. abgeschlossen, wenn M_1 und M_2 beide zusammenhängend sind bzw. beide abgeschlossen und mindestens eine beschränkt. — 2. Bezeichnet $L_n(M)$ das n -dimensionale Lebesgue-Maß der L_n -meßbaren Menge $M \subset R_n$, so ist $L_n((M_1 M_2)) \geq L_n(M_1) + L_n(M_2)$. Die anschließende Abschätzung von $L_2((M_1 M_2))$ nach oben für ebene, konvexe M_1, M_2 ist infolge eines Versehens unrichtig; eine Berichtigung wird demnächst (nach Mitt. des Verf.) im Jber. Deutsch. Math.-Verein. erscheinen. 3. Ist M_j topologisches Bild des k -dim. Würfels, so gilt $L_{k_1+k_2}((M_1 M_2)) \leq L_{k_1}(M_1) \cdot L_{k_2}(M_2)$. Im Falle stückweise stetig differenzierbarer Würfelbilder steht das Gleichheitszeichen, dann und nur dann, wenn M_j in einem linearen Teilraum T_j von R_n liegt und wenn T_1, T_2 vollständig senkrecht aufeinander stehen. — Den Schluß bilden Bemerkungen über die Anwendung von $(M_1 M_2)$ auf a) den Spezialfall, in welchem M_1 eine rektifizierbare Kurve und M_2 eine n -Kugel um den Nullpunkt ist (vgl. dies. Zbl. 21, 263; 22, 267); b) auf die geometrische Theorie der absolut konvergenten Reihen (vgl. dies. Zbl. 18, 208—209; 20, 14). *Haupt* (Erlangen).

Arsenin, B.: Sur les projections de certains ensembles mesurables B. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 107—109 (1940).

Die Note enthält die folgende Behauptung, die Antwort auf eine Fragestellung von Kunugui ist: Sei E eine B -meßbare Menge in der Ebene xoy , und sei P die Menge aller Punkte x_0 der Achse x , so daß die Geraden $x = x_0$ die Menge E in einer Menge F_0 schneiden, dann ist die Menge P eine Menge CA , d. h. Komplementärmenge einer linearen analytischen Menge. *L. Egyed* (Budapest).

Monteiro, António: Caractérisation des espaces de Hausdorff au moyen de l'opération de dérivation. Portugaliae Math. 1, 333—339 (1940).

Verf. antwortet auf ein Problem von Fréchet und beweist den Satz: Sei in einem Raum die Ableitung A' jeder Menge A definiert mit den Bedingungen: $(A + B)' = A' + B'$; $A'' \subset A'$; $A' = 0$, falls A aus einem einzigen Element besteht; endlich lasse sich für je zwei verschiedene Punkte a_1 und a_2 , die zu A' gehören, A in zwei nichtleere Teile A_1, A_2 zerspalten, so daß a_1 nicht in A_2 , a_2 nicht in A_1 enthalten ist; dann ist dieser Raum ein Hausdorffscher Raum. — Eine ähnliche Charakterisierung des Hausdorffschen Raumes erhält man, falls man anstatt der Ableitung die abgeschlossene Hülle \bar{A} der Mengen A nimmt. *L. Egyed* (Budapest).

Best, E.: On sets of fractional dimensions. Proc. Cambridge Philos. Soc. **36**, 152—159 (1940).

Jede Zahl x läßt sich eindeutig in der Form schreiben:

$$x = \frac{x_1}{1!} + \frac{x_2}{2!} + \frac{x_3}{3!} + \dots \quad (x_r \text{ ganz, positiv, } x_r < r)$$

„Die Menge der x , für welche die x_r kleiner als eine ganze Zahl b bleiben, hat im Hausdorffschen Sinne [Math. Ann. **79**, 157—179 (1919)] die Dimensionsfunktion $h(t) = b^{-u}$; $t = e^u u^{-u - \frac{1}{2}} (b-1)(2\pi^{-\frac{1}{2}})$.“ Der mühevollen Beweis stützt sich auf einen Satz von I. Gillis [Proc. Cambridge Philos. Soc. **33** (1937); dies. Zbl. **18**, 57]. *Hoheisel.*

Tornier, Erhard: Neuer Beweis der Äquivalenz der Maßtheorien mit verschiedenen Verknüpfungsoperationen. Deutsche Math. **5**, 212—216 (1940).

Verf. hat früher (Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie, Leipzig 1936, § 2; dies. Zbl. **13**, 359) gezeigt, daß alle Maßtheorien (im Sinne des von ihm zugrunde gelegten Axiomensystems) über einem gegebenen Mengenkörper nur durch Umrechnung (mittels einer stetigen, streng monotonen Funktion) aus der additiven entstehen. Hierfür wird jetzt ein ganz kurzer und durchsichtiger Beweis gegeben. *Haupt (Erlangen).*

Zwirner, Giuseppe: Sulla definizione d'area di una superficie. Atti Ist. Veneto Sci. etc. **97**, Pt 2, 409—416 (1938).

Unter einem (ebenen) Bereiche B verstehe man die abgeschlossene Hülle einer ebenen, beschränkten, zusammenhängenden, offenen Menge. Als Flächenstück (kurz FS) \mathfrak{F} im euklidischen R_3 bezeichne man ein eindeutiges, stetiges Bild eines Bereiches, welches darstellbar ist als Summe abzählbar (endlich oder unendlich) vieler Normalflächenstücke (kurz NFS). Dabei wird unter einem NFS verstanden ein FS, welches in bezug auf ein passendes kartesisches Koordinatensystem gegeben ist durch $z = g(x, y)$, wobei g in einem einfach zusammenhängenden Bereich E erklärt ist und im Innern von E stetige partielle erste Ableitungen besitzt, wobei ferner der Rand des FS (d. h. das Bild des Randes von E) rektifizierbar ist. In der Menge \mathfrak{M} aller FS \mathfrak{F} wird ein Umgebungsbegriff folgendermaßen erklärt: Es sei \mathfrak{F}_j gegeben durch $f_j(P_j)$, wo $P_j \in B_j$, $j = 1, 2$, ferner sei B_1 topologisches Bild $P_1 = t(P_2)$ von B_2 . Ist dann der Abstand der Punkte $f_1(t(P_2))$ und $f_2(P_2)$ kleiner als δ für alle $P_2 \in B_2$, so sagt man, es gehöre \mathfrak{F}_1 zur δ -Umgebung von \mathfrak{F}_2 . In bezug auf diesen Umgebungsbegriff werde die Unterhalbstetigkeit einer (eindeutigen) reellen Funktion $\varphi(\mathfrak{F})$ mit \mathfrak{M} als Definitionsbereich wie üblich erklärt. Nennt man ferner $\varphi(\mathfrak{F})$ additiv in \mathfrak{M} , wenn $\varphi(\mathfrak{F}) = \sum_{\mathfrak{N}_e} \varphi(\mathfrak{N}_e)$ für jede der oben erwähnten Zerlegungen $\mathfrak{F} = \sum_{\mathfrak{N}_e} \mathfrak{N}_e$ von \mathfrak{F} in NFS \mathfrak{N}_e , so gilt: Eine auf \mathfrak{M} nicht negative, unterhalbstetige und additive Funktion $\varphi(\mathfrak{F})$ ist eindeutig bestimmt, falls sie für kongruente \mathfrak{F} gleiche Werte annimmt und ferner gleich dem elementaren Oberflächeninhalt ist, wenn \mathfrak{F} ein Polyeder ist. Zum Beweis der Eindeutigkeit (und der Existenz) von $\varphi(\mathfrak{F})$ wird gezeigt, daß $\varphi(\mathfrak{F})$ gleich ist dem Lebesgueschen Oberflächenmaße (d. h. dem unteren Limes der Oberflächeninhalte von Polyedern, welche gegen \mathfrak{F} konvergieren). *Haupt (Erlangen).*

Jeffery, R. L.: Integration in abstract space. Duke math. J. **6**, 706—718 (1940).

Es wird eine Integrationstheorie für Funktionen entwickelt, deren Werte einem vollständigen, normierten Vektorraum Y angehören. Und zwar ist die Theorie äquivalent mit der von G. Birkhoff [Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 357—378 (1935); dies. Zbl. **13**, 8], während der Aufbau sich stärker an die klassische Entwicklung bei reellen und komplexen Funktionen anlehnt. Der Definitions- (Integrations-) Bereich sei ein Raum X , in welchem für einen X enthaltenden σ -Körper von Teilmengen ein (reellwertiges, nichtnegatives) Maß m erklärt ist. Verf. wählt speziell X als beschränkte Menge eines euklidischen Raumes und m als Lebesgue-Maß. Für beschränkte Integranden werden durch Zerlegung von X in abzählbar viele, meßbare Teile Näherungs-

summen in üblicher Weise gebildet. Gehen die Maße aller einzelnen Teile solcher Zerlegungen gegen Null und konvergiert dabei die Näherungssumme, so wird der Limes als Integral erklärt auf Grund des Nachweises, daß der Limes dann unabhängig von der Art des Grenzüberganges stets den gleichen Wert besitzt (sofern er existiert). Für unbeschränkte, fast überall endliche Integranden wird das Integral erklärt als Limes (falls er existiert) der Integrale über meßbare Teilmengen von X , in welchen der Integrand beschränkt ist und deren Maße gegen das Maß von X konvergieren. Nun ergeben sich die Additivität usw. dieses Integrals. Als integrierbar erweisen sich unter den beschränkten Funktionen die sog. meßbaren, d. h. die Limiten von sog. restrikten Funktionen. Dabei wird $f(x)$ als restrikt bezeichnet, wenn folgendes gilt: Es existiert ein positives R derart, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung von X in meßbare Teile $t_v, v = 1, 2, \dots$, gibt mit $m(t_v) < \varepsilon$ und $\left\| \sum_k (f(\xi_k) - f(\tilde{\xi}_k)) \right\| < R$, wobei die Summe erstreckt ist über irgendeine Teilfolge der natürlichen Zahlen und $\xi_k \in t_k, \tilde{\xi}_k \in t_k$ beliebig gewählt sind. Jede im Sinne von Bochner [Fundam. Math. 20, 262—276 (1933); dies. Zbl. 7, 109] meßbare Funktion, d. h. jeder Limes einer Folge von endlich-wertigen Funktionen, ist meßbar. Als ε -meßbar wird $f(x)$ bezeichnet, wenn zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung von X existiert mit $m(t_v) < \varepsilon$ und $\|f(\xi_v) - f(\tilde{\xi}_v)\| < \varepsilon$. Diese ε -Meßbarkeit ist äquivalent mit der Meßbarkeit im Sinne von Bochner. Es wird ein Beispiel einer restrikten, nicht Bochner-meßbaren Funktion gegeben. Schließlich wird die Äquivalenz des entwickelten Integralbegriffes mit dem Birkhoffschen nachgewiesen.

Haupt (Erlangen).

McCormick Torrance, Esther: Superposition on monotonic functions. Duke math. J. 6, 307—317 (1940).

Bezeichne $g(x)$ eine allgemeine monotone Funktion. Zu $g(x)$ gehören bekanntlich zwei G_δ -Mengen H und H' , zwischen denen $g(x)$ einen Homöomorphismus definiert. Es werden die folgenden Sätze bewiesen: 1. Ist f eine Bairesche Funktion α -ter Klasse mit $\alpha > 1$, so ist auch $f[g(x)]$ von α -ter Klasse. 2. Ist f meßbar (bzw. beliebig), so ist, damit $f[g(x)]$ meßbar sei, notwendig und hinreichend, daß die Umkehrfunktion g^{-1} von $g(x)$ auf H' totalstetig (bzw. H eine Nullmenge) ist. 3. Besitzt f die Bairesche Eigenschaft (bzw. ist f beliebig), so ist, damit $f[g(x)]$ die Bairesche Eigenschaft besitze, notwendig und hinreichend, daß g^{-1} die Teile erster Kategorie von H' auf Mengen erster Kategorie abbildet (bzw. H von erster Kategorie ist). Als Anwendung wird gezeigt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals $\int f(x)dg(x)$ im Fall eines meßbaren f die Totalstetigkeit von $g(x)$ auf H ist, wenn aber f beliebig gewählt werden darf, so muß H eine Nullmenge sein.

G. Alexits (Budapest).

Raikov, D.: Sur les différences et sur les dérivées. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 379—383 u. franz. Zusammenfassung 384 (1940) [Russisch].

L'aut. donne une nouvelle démonstration et généralisation d'un théorème de Marchaud (J. Math. pures appl. 6, 337—425). Si la fonction $f(x)$ est continue dans $[a, b]$ et s'il existe une suite h_k telle que $|\Delta_{h_k}^n f(x)| \leq C |h_k|^n$ pour tous les $x, x + nh_k \in [a, b]$, C étant une constante indépendant de x et h_k alors $f(x)$ possède dans $[a, b]$ une dérivée d'ordre $n - 1$ vérifiant la condition de Lipschitz $|f^{(n-1)}(y) - f^{(n-1)}(x)| \leq C |y - x|$ pour tous les $x, y \in [a, b]$. La démonstration est basée sur un théorème de S. Bernstein (Math. Ann. 75, 449—468).

N. Obreschkoff (Sofia).

Cartan, Henri: Sur les maxima des dérivées successives d'une fonction. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 431—434 (1940).

A precisazione di sue precedenti ricerche, diretta a risolvere il cosiddetto problema d'equivalenza di Carleman (questo Zbl. 22, 155), l'A. dimostra che, scelta a piacere una successione di numeri positivi finiti A_n ($n = 1, 2, \dots$) e costruite corrispondentemente le funzioni

$$S(r) = \max_{n \leq r} \frac{r^n}{A_n}, \quad U(r) = \max_{n \leq r} \frac{r^{2n}}{n^n A_n},$$

indi le cosiddette successioni regolarizzate di numeri

$$A_n^0 = \text{extr. sup.}_{r \geq n} \frac{r^n}{S(r)}, \quad A_n' = \frac{1}{n^n} \text{extr. sup.}_{r \geq n} \frac{r^{2n}}{U(r)},$$

esistono sempre una funzione $f(x)$ appartenente alla classe $\{A_n^0\}$ sull'intervallo aperto $(-1, 1)$, ed una $g(x)$ appartenente alla classe $\{A_n'\}$ sull'intervallo chiuso $(-1, 1)$. Le derivate di queste funzioni soddisfano alle disuguaglianze $|f^{(n)}(0)| \leq \mu^n A_n^0$, $|g^{(n)}(1)| \leq \nu^n A_n'$, essendo μ, ν due opportuni numeri positivi.

Tullio Viola (Roma).

Bödewadt, U. T.: Über Funktionen mit n Zeichenwechseln, deren Momente bis zur Ordnung $n - 1$ verschwinden. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 50, 129—139 (1940).

Die Funktion $f(x)$ sei in $0 < x < 1$ von beschränkter Schwankung und besitze dort die in der Überschrift genannten Eigenschaften (sie sei im letzten Abschnitt festen Zeichens vor 1 etwa positiv); $f(x)$ heißt dann eine Randfunktion n -ter Ordnung. Mit diesem Namen will Verf. andeuten, daß hierin solche Funktionen, deren Vorhandenseinsbeweis er umreißt, den Rand des Möglichen erreichen: Ihre Stieltjesschen Momente der Ordnungen $N \geq n$ sind positiv. Der ziemlich verwickelte Beweis dieser Eigenschaft \mathfrak{R} verläuft im wesentlichen so: Bei ganzen $k \geq 0$ bedeute $q(k)$ die Quersumme der Darstellung von k im Dualsystem. $f(x)$ läßt sich dann in 2^n Randfunktionen 0-ter Ordnung zerlegen,

$$(1) \quad f(x) = \sum_k (-1)^{n+q(k)} g_k(x), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1,$$

wo $g_k(x) > 0$ im $[q(k) + 1]$ -ten Abschnitt festen Zeichens von $f(x)$ und sonst $g_k(x) = 0$ ist; dabei haben zusammengehörige Randfunktionen $(r - 1)$ -ter Ordnung entgegengesetzt gleiche Momente $(r - 1)$ -ter Ordnung. Verf. erklärt nun, wie hier im einzelnen nicht wiedergegeben werden kann, zwei Gesamtheiten von Funktionen; die Mitglieder der ersten \mathfrak{h} sind positiv, die der zweiten \mathfrak{f} , aus den $g(x)$ in (1) gebildet, wachsen. Die höheren Momente von $f(x)$ lassen sich durch Stieltjessche Integrale darstellen, deren Integranden zu \mathfrak{h} und deren Belegungsfunktionen zu \mathfrak{f} gehören: dadurch wird \mathfrak{R} offenbar.

Koschmieder (Graz).

Popoviciu, Tiberiu: Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur. Disquisit. Math. et Phys., Bucureşti 1, 35—42 (1940).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Funktionen n -ter Ordnung, wie sie vom Verf. früher betrachtet wurden (vgl. z. B. dies. Zbl. 7, 249). Dazu dienen folgende Begriffsbildungen: I. Zu irgendeiner endlichen Folge $e = \{x_1, \dots, x_m\}$ von verschiedenen reellen $x_\mu \in \mathfrak{E}$, wo \mathfrak{E} der Definitionsbereich von $f(x)$, bilden wir die Folge $d_{n+1}(e) = d_{n+1}(e; f)$ der Differenzenquotienten $\Delta_{n+1}^\mu(f) = [x_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_{\mu+n+1}](f)$, $\mu = 1, 2, \dots, m - n - 1$. Die Anzahl der Zeichenwechsel in $d_{n+1}(e)$ sei $z_{n+1}(e) = z_{n+1}(e; f)$. Dann gilt $z_{n+1}(e) \geq z_{n+1}(e')$ für jede Teilfolge e' von e ; steht das Gleichheitszeichen nur für $e' = e$, so heiße e irreduzibel (bezüglich n und f). Es wird u. a. gezeigt: Für $z_{n+1}(e) = 0$ oder 1 bzw. für $n = -1$ oder 0 ist die Gliederzahl jeder irreduziblen e gleich $n + 2 + z_{n+1}^\mu(e)$. — II. Es heißt $f(x)$ von der Ordnung (n/k) , wenn $k = \max_{e \in \mathfrak{E}} z_{n+1}(e)$, wobei also e alle endlichen, in \mathfrak{E} enthaltenen Folgen durchläuft; ist insbesondere das letzte, von Null verschiedene Glied einer $d_{n+1}(e)$ mit $z_{n+1}(e) = k$ positiv bzw. negativ, so heiße $f(x)$ von der Ordnung $(n/k)^+$ bzw. $(n/k)^-$. Die Funktionen n -ter Ordnung sind identisch mit den Funktionen der Ordnung $(n/0)$. Es gilt der Satz: Ist $f(x)$ von der Ordnung (n/k) , so höchstens von der Ordnung $(n - i/k + i)$, $i = 1, \dots, n + 1$. Ist $f(x)$ von der Ordnung $(n/k)^+$ und gleichzeitig von der Ordnung $(n - i/k + i)$, so von der Ordnung $(n - i/k + i)^+$, $i = 1, \dots, n + 1$. Haupt (Erlangen).

Popoviciu, Tiberiu: Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur. 2. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 22, 473—477 (1940).

Es werden die auf einer linearen Menge E abschnittsweise von n -ter Ordnung konvexen Funktionen $f(x)$ untersucht, d. h. solche, bei denen E sich derart in die Summe von m Teilmengen E_i ($i = 1, 2, \dots, m$) zerlegen läßt, daß für jedes i die Punkte von E_i

sämtlich links von denen von E_{i+1} liegen und $f(x)$ auf E_i von n -ter Ordnung konvex ist (vgl. dies. Zbl. 21, 116). Für jede solche Funktion läßt sich die geschilderte Zerlegung von E im allgemeinen auf mehrfache Arten bewerkstelligen; den kleinsten Wert h , den m dabei erreichen kann, nennt man die Charakteristik von $f(x)$ bezüglich E . Insbesondere untersucht Verf. die „eigentlichen“ Zerlegungen von E , d. s. solche, bei denen auf keiner der Mengen $E_i + E_{i+1}$ $f(x)$ von n -ter Ordnung konvex ist; das Hauptergebnis lautet: Für jede eigentliche Zerlegung von E gilt die Ungleichung $h \leq m \leq 2h - 1$.

Tullio Viola (Roma).

Popoviciu, Tiberiu: Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur. 5. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 22, 351—356 (1940).

Si danno alcune disuguaglianze notevoli per le funzioni $f(x)$ convesse [non concave] d'ordine n in un intervallo \overline{ab} e per le loro derivate, cioè funzioni tali che sia (cfr. questo Zbl. 9, 59): $[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}; f] > 0$ [≥ 0], per ogni gruppo di $n + 2$ punti distinti x_0, x_1, \dots, x_{n+1} di \overline{ab} . Una tale funzione possiede, continue, le derivate successive $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ e inoltre le derivate a destra e a sinistra d'ord. n , $[f_-^n = f_-^{(n-1)'}, f_+^n = f_+^{(n-1)'}]$ in ogni punto interno ad \overline{ab} . — Le condizioni necess. e suffic. cui devono soddisfare certi coefficienti p_{ij} e certi punti $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ interni ad \overline{ab} (con $m \geq n + 2$), affinchè sussista la disuguaglianza (1) $\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij} f^{(j)}(x_i) \geq 0$ (in cui è $0 \leq k_i \leq n$ per ogni i ed $f^{(n)}$ è una delle due derivate $f_-^{(n)}, f_+^{(n)}$, non necessariamente la stessa per ogni x) qualunque sia la funzione $f(x)$ non concava d'ordine n in \overline{ab} , sono espresse dalle formole:

$$(2) \begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij} \nu(\nu-1) \dots (\nu-j+1) x_i^{\nu-j} = 0, & (\nu=0, 1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij} n(n-1) \dots (n-j+1) (x_i-x)^{n-j} \geq 0. & (x_\nu \leq x \leq x_{\nu+1}; \nu=1, 2, \dots, m-1) \end{cases}$$

Se inoltre $\sum_{j=0}^{k_i} |p_{ij}| \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$) e se $f(x)$ è convessa d'ord. n , vale nella (1), sotto le condizioni (2), il segno $>$. — Altra disuguaglianza notevole, dalla quale sono tratte varie conseguenze, è:

$$(n-1)[x_1, x_2, \dots, x_n; f] \geq [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}; f'],$$

cui soddisfa ogni funzione non concava d'ordine n in un intervallo contenente nell'interno i punti x , essendo $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ gli zeri della derivata del polinomio $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$.

Tullio Viola (Roma).

Analysis.

Differential- und Integralrechnung:

Müller, Max: Über die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Differentiation. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 50, 93—104 (1940).

Es handelt sich um hinreichende Bedingungen für die im Titel genannte Vertauschbarkeit. Verf. bezeichnet eine Folge $\{f_\nu(x)\}$ reeller Funktionen einer reellen Veränderlichen x als gleichgradig differenzierbar in x_0 , wenn $f'_\nu(x_0)$ existiert und wenn $|f_\nu(x_0) - [x_0, x_0+h](f_\nu)| < \varepsilon$, sobald $|h| < \delta(\varepsilon)$ unabhängig von ν ist; dabei ist gesetzt: $[x_0, x_0+h](f_\nu) = (f_\nu(x_0+h) - f_\nu(x_0)):h$. — Es wird gezeigt: I. Satz: Vor. 1. Es ist $f(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x)$ für $x \in [a, b]$. 2. Die $f_\nu(x)$ sind gleichgradig differenzierbar in $x_0 \in [a, b]$. Beh. Es existiert $f'(x_0)$ mit $f'(x_0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f'_\nu(x_0)$. — Vor. 2 ist für die Beh. gleichwertig mit Vor. 2': Es existiert $f'_\nu(x_0)$ und die Folge $\{[x_0, x_0+h](f_\nu)\}$ ist gleichmäßig konvergent auf jeder einzelnen Nullfolge $\{h_\nu\}$. — Dem Satz I wird gegenübergestellt der bekannte II. Satz. Vor. 1. wie im I. Satz. 2. Es existiert $f'_\nu(x)$ und $\varphi(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f'_\nu(x)$ für $x \in [a, b]$. 3. Es ist $\varphi(x)$ stetig in x_0 . 4. Es existiert eine Kon-

stante S mit $|\varphi(x) - f'_\nu(x)| \leq S$ für alle ν und $x \in [a, b]$. Beh. Es existiert $f'(x_0)$ mit $f'(x_0) = \varphi(x_0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f'_\nu(x_0)$. — An Beispielen wird gezeigt, daß die Anwendungsbereiche von Satz I und II sich überschneiden. Ferner Angabe von Sätzen, die weniger weit reichen als Satz I. *Haupt* (Erlangen).

Abramov, I. M.: Sur les formules au moyen desquelles s'expriment les dérivées d'ordre quelconque des fonctions de fonctions. Appl. Math. a. Mech., N. s. 3, Nr 3. 145—149 u. franz. Zusammenfassung 149—150 (1939) [Russisch].

Die höheren Ableitungen von (zusammengesetzten oder) mittelbaren Funktionen werden hier in Formeln niedergelegt, die für die analytische Ausführung praktisch sein sollen und auch für recht komplizierte Fälle eine gewisse Übersicht des Resultats erlauben. *Hoheisel* (Köln-Lindenthal).

Żyliński, E.: Sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 68—71 (1940).

Für den Satz, daß die Menge der Extrempunkte (für ein Extremum mit Nebenbedingungen) durch Eliminierung der Lagrangeschen Multiplikatoren sich ergibt, wird hier ein rein algebraischer Beweis gegeben. *Hoheisel*.

Mira Fernandes, A. de: Ein Multiplikationssatz. Portugaliae Math. 1, 340—342 (1940) [Portugiesisch].

Verf. betrachtet die Funktionalgleichung: $X(ts) = X(t) + X(s)$, und zeigt, daß aus der Stetigkeit von $X(t)$ in $t = 1$ die Differenzierbarkeit in $t = 1$ und dann für beliebiges $t \neq 0$ folgt. *Luigi Beretta* (Florenz).

Ionesco, D. V.: L'application d'une formule de T. J. Stieltjes à un problème de M. D. Pompeiu. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 21, 214—218 (1939).

Sind x_0, x_1, \dots, x_n voneinander verschiedene Argumente, so gilt bekanntlich der verallgemeinerte Mittelwertsatz

$$(1) \quad \left| \begin{array}{cccc} f(x_0), & x_0^{n-1}, & x_0^{n-2}, & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n), & x_n^{n-1}, & x_n^{n-2}, & \dots & 1 \end{array} \right| = \frac{\Delta}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

wobei $\min x_\nu \leq \xi \leq \max x_\nu$ ist und $\Delta = \prod_{\mu < \nu} (x_\mu - x_\nu)$ bedeutet. Ist $f(x)$ ein Polynom $n + 1$ -ten Grades, so wird in (1)

$$(2) \quad \xi = \frac{1}{n+1} (x_0 + x_1 + \dots + x_n).$$

Verf. fragt umgekehrt, wann (1) bei beliebigen Argumenten x_ν mit dem Werte (2) von ξ gilt, und beweist unter Annahme der Taylorentwickelbarkeit von $f(x)$, daß dann $f(x)$ Polynom $n + 1$ -ten Grades sein muß. *Harald Geppert* (Berlin).

Ionesco, D. V.: Généralisation d'une équation fonctionnelle rencontrée par G. Darboux. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 41, H. 2, 77—100 (1939).

Für jedes Polynom $2p$ -ten Grades $\varphi(x)$ gilt die Identität

$$(*) \quad \int_{\lambda}^{\mu} \varphi(x) dx = (\mu - \lambda) \sum_{s=0}^p \alpha_s \left\{ \varphi \left(\lambda + s \frac{\mu - \lambda}{2p} \right) + \varphi \left(\mu - s \frac{\mu - \lambda}{2p} \right) \right\},$$

in der

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_p = \frac{1}{2},$$

$$p^2 \alpha_0 + (p-1)^2 \alpha_1 + \dots + \alpha_{p-1} = \frac{p^2}{2 \cdot 3}, \dots,$$

$$p^{2p} \alpha_0 + (p-1)^{2p} \alpha_1 + \dots + \alpha_{p-1} = \frac{p^{2p}}{p(2p+1)}$$

ist; umgekehrt ist die allgemeine Lösung der als Funktionalgleichung für $\varphi(x)$ aufgefaßten Gleichung (*) ein beliebiges Polynom $2p + 1$ -ten Grades $\varphi(x)$, vgl. auch dies. Zbl. 22, 124; 23, 118. Es folgen viele Anwendungen dieser Formel auf die Berechnung der Schwerpunkte von Kurven und ebenen Flächenstücken. *Luigi Beretta*.

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Cattaneo, Paolo: Sul calcolo approssimato degli integrali definiti. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 97, Pt. 2, 67—73 (1938).

Für ein Polynom höchstens dritten Grades gilt die unmittelbar zu bestätigende Formel

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) \{f(\alpha) + f(\beta)\} + \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^2 \{f'(\alpha) - f'(\beta)\},$$

aus der man durch Summenbildung den einfachsten Fall der Eulerschen Summenformel

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left\{ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + f(b) \right\} + \frac{h^2}{12} \{f'(a) - f'(b)\}, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

ableitet; bei beliebigem $f(x)$ ist der Fehler in (1) gleich $\frac{1}{720} h^4 (b-a) f^{(4)}(\xi)$, ($a \leq \xi \leq b$) und i. a. etwas kleiner als bei der entsprechenden Simpsonformel. Diese Art der Ableitung dürfte zur Gewinnung der allgemeinen Eulerschen Summenformel sich nicht empfehlen.

Harald Geppert (Berlin).

Rémès, E.: Sur certaines classes de fonctionnelles linéaires dans les espaces C_p et sur les termes complémentaires des formules d'analyse approximative. I. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 3, 21—61 u. franz. Zusammenfassung 62 (1940) [Russisch].

Soient $f(x)$ des fonctions définies dans $[a, b]$ qui possèdent des dérivées continues jusqu'au m -ième ordre. Une fonctionnelle $A[f(x)]$ appartient à l'espace C_m si pour chaque $f(x)$ on a $|A[f(x)]| \leq K \max(M_0, M_1, \dots, M_m)$, $M_i = \max |f^{(i)}(x)|$, $a \leq x \leq b$, ($i = 0, 1, 2, \dots, m$), K est indépendant de $f(x)$. En s'appuyant sur un théorème de F. Riesz [Ann. École norm. 31 (1914)] l'a. donne des représentations intégrales des fonctionnelles de l'espace C_m qui s'annulent pour tous les polynômes ordinaires d'un degré donné ou bien pour tous les polynômes généralisés d'un rang donné, d'un système de fonctions linéairement indépendantes.

N. Obrechhoff (Sofia).

Rémès, E.: Sur certaines classes de fonctionnelles linéaires dans les espaces C_p et sur les termes complémentaires des formules d'analyse approximative. II. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 4, 47—81 u. franz. Zusammenfassung 82 (1940) [Russisch].

L'a. donne des applications à divers cas pour l'investigation des termes complémentaires de différentes formules de l'analyse approximative de la méthode générale dont les fondements ont été exposés dans son travail récent (cfr. l'abstrait antérieur). Des évaluations simples et exactes sont obtenues pour les termes complémentaires des formules largement en usage comme la formule de quadrature à quadrilatères, la formule sommatoire et de quadratures de Laplace à ordonnées intérieures, les formules de quadratures de Tchebycheff, les formules de différentiation approximative déduites des séries d'interpolation de Stirling et Bessel.

N. Obrechhoff (Sofia).

Zoukhovitzky, S.: Sur une fonction qui s'écarte asymptotiquement le moins possible de zéro sur un intervalle fixe. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 4, 175—178 u. franz. Zusammenfassung 179 (1940) [Ukrainisch].

L'a. donne la valeur asymptotique pour $n \rightarrow \infty$ de la meilleure approximation de zéro par les fonctions de la forme

$$\frac{\sigma_0 x^{n+l} + \sigma_1 x^{n+l-1} + \dots + \sigma_k x^{n+l-k} + p_{k+1} x^{n+l-k-1} + \dots + p_{n+l}}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2l})}}$$

où $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ sont des nombres réels donnés et a_1, a_2, \dots, a_{2l} sont des nombres réels en dehors de l'intervalle $(-h, h)$ ou des nombres complexes conjugués. Le problème pour n constant et h variable a été considéré par l'a. dans un autre travail (ce Zbl. 19, 254).

N. Obrechhoff (Sofia).

Lozinski, S. M.: Über Interpolation. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 57—67 (1940).

Für positives ganzes n sei $x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1}$ ($k=1, 2, \dots, 2n+1$). Ist $f(x)$ eine in $\langle 0, 2\pi \rangle$ definierte Funktion, so weiß man, daß die Folge der trigonometrischen Interpolationspolynome

$$P_n(f; x) = \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k^{(n)}) \frac{\sin(2n+1) \frac{x - x_k^{(n)}}{2}}{(2n+1) \sin \frac{x - x_k^{(n)}}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

die jeweils an den Stellen $x_k^{(n)}$ die Werte $f(x_k^{(n)})$ annehmen, ein Konvergenzverhalten aufweist, das dem Verhalten der Teilsummen der Fourierreihe von $f(x)$ analog ist [vgl. D. Jackson, The theory of approximation, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **11** (1930)]. Dabei muß jedoch $f(x)$ auf verhältnismäßig enge Funktionsklassen beschränkt werden, und es hat insbesondere offenbar keinen Sinn, die Polynome $P_n(f; x)$ für beliebige meßbare Funktionen $f(x)$ zu betrachten. Unter Benutzung eines von L. V. Kantorovitch (C. R. Acad. Sci. URSS **1930**, Nr 21, 563—568, Nr 22, 595—600) auf die Bernsteinschen Polynome angewandten Verfahrens bildet daher Verf. an Stelle der $P_n(f; x)$ die trigonometrischen Polynome

$$Q_n(f; x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{2n+1}{2\pi} \frac{k \frac{2\pi}{2n+1}}{(k-1) \frac{2\pi}{2n+1}} \int_0^{2\pi} f(t) dt \frac{\sin(2n+1) \frac{x - x_k^{(n)}}{2}}{(2n+1) \sin \frac{x - x_k^{(n)}}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Sie lassen sich für jede summierbare Funktion $f(x)$ bilden, und ihr Verhalten ist unter allgemeinen Voraussetzungen dem der Teilsummen der Fourierreihe von $f(x)$ sehr ähnlich. Einige Eigenschaften der Polynome $Q_n(f; x)$ hat Verf. früher bewiesen [Rec. math. Moscou, N. s. **7**, 329—362 (1940); dies. Zbl. **23**, 128]. In der vorliegenden Note wird im wesentlichen gezeigt: (1) Ist $f(x)$ eine Funktion der Klasse L^p mit $p > 1$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - Q_n(f; x)|^p dx = 0.$$

(2) Sind $f(x)$ und $|f(x)| \log^+ |f(x)|$ summierbar, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - Q_n(f; x)| dx = 0$.

(3) Ist $f(x)$ summierbar und $0 < p < 1$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - Q_n(f; x)|^p dx = 0$. Die-

selben Limesbeziehungen gelten unter den genannten Voraussetzungen über $f(x)$ auch dann, wenn jeweils $f(x)$ durch die konjugierte Funktion $\bar{f}(x)$ und $Q_n(f; x)$ durch das konjugierte Polynom $\bar{Q}_n(f; x)$ ersetzt wird. — Analoge Sätze werden für die in $|z| < 1$ analytischen Funktionen $f(z)$, welche einer Klasse H_p ($p > 0$) im Sinne von F. Riesz angehören, und die den $Q_n(f; x)$ entsprechenden bzw. etwas modifizierte Interpolationspolynome bewiesen.

F. Lösch (Rostock).

Reihen:

Meyer-König, Werner: Zur Frage der Umkehrung des C- und A-Verfahrens bei Doppelfolgen. Math. Z. **46**, 157—160 (1940).

K. Knopp hat [Math. Z. **45**, 573—589 (1939); dies. Zbl. **23**, 28] u. a. folgenden O-Umkehrsatz über reelle Doppelfolgen bewiesen: Aus $\sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n s_{\mu\nu} / (m+1)(n+1) \rightarrow s$

folgt $s_{mn} \rightarrow s$, falls $(m^2 + n^2) a_{mn} < M$; dabei sind $s_{mn} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu}$ die Teilsummen der

Doppelreihe $\sum a_{\mu\nu}$. Ob dieser Satz auch dann noch gültig bleibt, wenn die Beschränktheitsbedingung durch die geringere Forderung $mna_{mn} < M$ ersetzt wird, blieb un-

entschieden. Verf. zeigt nun durch Konstruktion eines Gegenbeispiels, daß sogar $mn a_{mn} = o(1)$ weder beim A -Verfahren noch beim C_1 -Verfahren eine Konvergenzbedingung ist.

Gerhard Lyra (Göttingen).

Garten, V.: Über die Beziehungen zwischen den Hölderschen und Laplace-Abelschen Mittelbildungen und den Satz von O. Hölder. Math. Z. 46, 86—103 (1940).

Der Beweis des Hölderschen Satzes, daß aus der Konvergenz der Hölderschen H -Mittel $h_n^{(k)}$ einer Zahlenfolge s_n ($h_n^{(k)} = (n+1)^{-1} \sum_{\nu=0}^n h_\nu^{(k-1)}$, $h_\nu^{(0)} = s_\nu$, $n = 0, 1, 2, \dots \rightarrow \infty$ bei festem $k = 1, 2, \dots$) die Konvergenz der Abelschen A -Mittel $a(x)$ von s_n ($a(x) = (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu$, $x \rightarrow 1-0$) zum gleichen Grenzwert folgt, wird zumeist durch Berufung auf die Äquivalenz des Cesàroschen C -Verfahrens mit dem H -Verfahren und auf den $C \rightarrow A$ -Satz geführt (vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., S. 498 und 508, Berlin 1931; dies. Zbl. 1, 392). Verf. gibt einen neuen, direkten Beweis durch explizite Angabe einer die H -Mittel in die A -Mittel überführenden $H \rightarrow A$ -Transformation, die sich als permanent erweist. Satz und Beweis werden auf

Höldersche Integralmittel ($h^{(k)}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x h^{(k-1)}(t) dt$, $h^{(0)}(t) = s(t)$, $x \rightarrow \infty$ bei festem $k = 1, 2, \dots$) einerseits, Laplace-Abelsche Mittel ($L(y) = y \int_0^\infty e^{-ty} s(t) dt$, $y \rightarrow +0$)

andererseits übertragen. Im Anschluß daran wird im Fall $s(t) = O(t^q)$ ($q > 0$) die Schwankung der Mittel $L(y)$ durch die Schwankung der Mittel $h^{(k)}(x)$ scharf abgeschätzt. Eine solche Abschätzung hat unter anderem Interesse als ein Analogon zum Knoppschen Kernsatz [K. Knopp, Math. Z. 31, 97—127 (1929), insbesondere 115], der selbst nicht anwendbar ist, weil die vermittelnde $H \rightarrow L$ -Transformation nicht echt ist. — Schließlich werden noch Beziehungen zwischen den Hauptlimites gewöhnlicher Hölderscher und Cesàroscher Mittel von nicht negativen Folgen abgeleitet. Es sei k, l positiv ganz, $s_n \geq 0$,

$$h_n^{(k)} = \binom{n+k}{n}^{-1} \sum_{\nu=0}^n \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} s_\nu \quad (n = 0, 1, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(k)} = C_k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{(k)} = H_k.$$

Dann ist $\eta_k H_k \leq \eta_l H_l$ ($l > k \geq 1$) mit $\eta_1 = 1$ und $\eta_k = \Gamma(k) e^{k-1} (k-1)^{1-k}$ ($k > 1$). Ferner ist $\gamma_k C_k \leq \eta_k H_k$ ($k \geq 1$) und allgemeiner $\gamma_k C_k \leq \eta_l H_l$ ($l > k \geq 1$) mit $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_k = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}$ ($k > 1$). Die auftretenden Konstanten werden in geeigneten

Fällen angenommen. Die entsprechenden Sätze für Höldersche Integralmittel an Stelle der gewöhnlichen H -Mittel und für Rieszsche Integralmittel an Stelle der C -Mittel wurden von Verf. und K. Knopp in einer früheren Arbeit [Math. Z. 42, 365—388 (1937), insbesondere 384—385; dies. Zbl. 16, 20] bewiesen. Die Beweise erfordern diesmal einen größeren Umfang, als er dort notwendig war. Meyer-König (Stuttgart).

Menchoff, D.: Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales par des méthodes de Cesàro. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 121—134 (1940).

Bezeichne $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall (a, b) definiertes System normierter Orthogonalfunktionen und sei $\{c_n\}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen, für welche $\sum c_n^2$ konvergiert. Die Reihe $\sum c_n \varphi_n(x)$ braucht bekanntlich in keinem Punkte (C, δ) -summierbar, sogar nicht einmal Poisson-summierbar zu sein. Demgegenüber beweist Verf. den folgenden Satz: $\{\varphi_n(x)\}$ läßt sich so in eine Folge $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$ umordnen, daß die Reihe $\sum c_n \varphi_{\nu_n}(x)$ in (a, b) für jedes $\delta > 0$ fast überall (C, δ) -summierbar wird. Diese Behauptung ergibt sich als Korollar eines entsprechenden Satzes über die Summation der umgeordneten Reihe mit Töplitzschen linearen Mitteln. Es ist bemerkenswert, daß die Umordnung des Systems $\{\varphi_n(x)\}$ weder von den Zahlen c_n noch von der Größe $\delta > 0$ abhängt.

G. Alexius (Budapest).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Kawata, Tatsuo: A remark on the non-vanishing of almost periodic functions. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 157—160 (1940).

Let $f(x)$ be a S^2 integrable, almost periodic function and its Fourier series be $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$, for which there exists an N such that $A(u) = \sum_{-u-\frac{1}{2} < \lambda_k < -u+\frac{1}{2}} |a_k|$ is finite for each $u \geq N$ and suppose there exists a function $\theta(u)$ such that $A(u) = O(\exp(-\theta(u)))$ and $\int_1^\infty \theta(x) x^{-2} dx = \infty$.

Let $g(z)$ ($z = x + iy$) be a function analytic in $c < x < d$, $0 < y < r$ and continuous in $c < x < d$, $0 \leq y < r$. The author proves that if $f(x) = g(x)$ almost everywhere in some interval in (c, d) , then it holds almost everywhere in (c, d) . He proves the theorem by reducing it to a Levinson's theorem concerning Fourier transforms [J. Math. Physics **16** (1938); this Zbl. **18**, 221]. Izumi (Sendai).

Levinson, Norman: On Hardy's theorem on the zeros of the zeta function. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **19**, 159—160 (1940).

Hardy hat 1914 auf indirektem Wege bewiesen, daß die Zetafunktion auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ unendlich viele Nullstellen hat. Verf. benutzt im wesentlichen dieselbe

Formel, die das Integral $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(2t) z^{-it} dt$ (\mathcal{E} die Bezeichnung von Landau, Hand-

buch § 71) enthält, um ebenfalls indirekt dasselbe Ziel zu erreichen. Er setzt erstens $z = \exp[\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon)i]$, ein zweites Mal $z = 2 \exp[\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon)i]$ und geht zur Grenze $\varepsilon \rightarrow 0$ über. Im ersten Fall wird dann unter der Annahme, $\mathcal{E}(2t)$ habe nur eine endliche

Anzahl von reellen Nullstellen, im zweiten Fall direkt eine Aussage über $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{E}(zt)| e^{\frac{1}{2}\pi t} dt$ erhalten, und diese zwei Aussagen widersprechen sich. Kienast.

Spezielle Funktionen:

Koschmieder, Lothar: Summierung einer nach den Hermiteischen Polynomen des Kreises fortschreitenden Reihe. Anz. Akad. Wiss., Wien **1940**, 41—43 (Nr 7).

Beweis der Reihensummierung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \sum_{l+m=n} l! m! U_{lm}(x, y) V_{lm}(\xi, \eta) \\ = \{[1 - 2s(x\xi + y\eta) + s^2]^2 - 4s^2(1 - x^2 - y^2)(1 - \xi^2 - \eta^2)\}^{-\frac{1}{2}},$$

wo $U_{lm}(x, y)$ und $V_{lm}(x, y)$ die durch

$$[(1 - sx - ty)^2 + (s^2 + t^2)(1 - x^2 - y^2)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{l, m=0}^{\infty} s^l t^m U_{lm}(x, y)$$

und

$$(1 - 2sx - 2ty + s^2 + t^2)^{-1} = \sum_{l, m=0}^{\infty} s^l t^m V_{lm}(x, y)$$

erzeugten Hermiteischen Polynome des Einheitskreises bedeuten. Schoblik (Brünn).

Störmer, Carl: Sur une généralisation de la constante d'Euler. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 316—319 (1940).

Es bedeute τ eine komplexe Zahl mit positivem Imaginärteil; der Ausdruck

$$V_n = \frac{\pi}{\tau} \sum_{\nu=1}^n \cotang \frac{\nu\pi}{\tau} - \ln \left(\frac{\tau}{\pi} \sin \frac{n\pi}{\tau} \right),$$

wobei der Logarithmus mit dem für positiv-reelle Argumentwerte reellen Zweig einzusetzen ist, strebt mit $n \rightarrow \infty$ gegen eine Grenzfunktion $D(\tau)$, die man in Form einer Lambertschen Reihe schreiben kann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = D(\tau) = \ln \frac{2\pi i}{\tau} + \frac{2\pi i}{\tau} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi^\nu}{1 - \xi^\nu}; \quad \xi = e^{-\frac{2\pi i}{\tau}}.$$

Für die hier auftretende Summe kann man eine von Mellin herrührende Entwicklung heranziehen:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu x}}{1 - e^{-\nu x}} = \frac{\gamma - \ln x}{x} + \frac{1}{4} - \sum_{\nu=1}^n \frac{B_{2\nu}}{2\nu} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu)!} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) [\zeta(z)]^2 x^{-z} dz,$$

in der γ die Eulersche Konstante, $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, ... die Bernoullischen Zahlen, $\zeta(z)$ die Riemannsche Zetafunktion bedeuten und $-2n - 1 < a < -2n$ zu wählen ist. Daraus folgt, daß

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} D(\tau) = \gamma = 0,577 \dots \quad \text{Harald Geppert (Berlin).}$$

Brixy, Eduard: Einige Integrale der Besselschen Funktionen reellen positiven Argumentes. Z. angew. Math. Mech. 20, 236—238 (1940).

Die in einer früheren Mitteilung des Verf. (s. dies. Zbl. 22, 334) aufgestellten Potenzreihen für die mittels der Besselschen Funktion $J_\nu(x)$ gebildeten Funktionen

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu / \nu! J_\nu(x), \quad \frac{x}{2} J_{\nu-1}(x) / \nu! J_\nu(x), \quad J_{\nu+1}(x) / \nu! J_\nu(x), \quad \frac{2}{\nu!} \log \left[\left(\frac{x}{2}\right)^\nu / \nu! J_\nu(x) \right]$$

werden gliedweise integriert und die Integrale zwischen den Grenzen 0,1 für $\nu = 0,1$ auf 6 Dezimalstellen berechnet.

O. Borůvka (Brünn).

Toscano, Letterio: Numeri di Stirling generalizzati, operatori differenziali e polinomi ipergeometrici. Comment. Pontif. Acad. Sci. 3, 721—757 (1939).

Die Arbeit bringt in ihrem wesentlichen Teil Anwendungen früherer Untersuchungen des Verf. über vertauschbare Operatoren 2. Ordnung (dies. Zbl. 15, 24) auf Differentialoperatoren mit dem Ziel, mit Hilfe der so gewonnenen Beziehungen zwischen Differentialoperatoren Relationen zwischen hypergeometrischen Polynomen (sowie deren Grenzfällen wie Laguerreschen, Hermiteschen und Legendreschen Polynomen) herzuleiten. Hierfür erforderliche Formeln über gewisse Polynome, die den Stirlingschen Zahlen nahestehen, wie etwa über die durch

$$a_{n,1}^{(u)} = (-1)^{n-1} u(u+1)(u+2) \dots (u+n-2); \quad a_{n,n}^{(u)} = 1;$$

$$a_{n,i}^{(u)} = a_{n-1,i-1}^{(u)} - [n+i(u-1)-1] a_{n-1,i}^{(u-1)}$$

definierten Polynome und viele ähnliche, geben dem Verf. Veranlassung, diese Polynome in der ersten Hälfte der Arbeit eingehender zu studieren. Die zahlreichen, vom Verf. hierbei hergeleiteten Formeln gruppieren sich etwa folgendermaßen: 1. Beziehungen dieser Polynome zur Fakultät $x^{(\mu,r)} = x(x+\mu)(x+2\mu) \dots (x+(r-1)\mu)$, insbesondere ihre Darstellung durch höhere Differenzen der Fakultät. 2. Entwicklungen, deren Koeffizienten Stirlingsche Zahlen sind. 3. Beziehungen zwischen den Polynomen untereinander. 4. Numerische Werte dieser Polynome für die Argumentwerte 0, 1, 2, 3, -1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$. 5. Relationen zwischen Stirlingschen Zahlen (als Folgerungen aus 2. und 4.). 5. Erzeugende Funktionen.

Schoblik (Brünn).

Bock, Philipp: Einige Integrale aus der Theorie der hypergeometrischen und verwandter Funktionen. Compositio Math. 7, 123—134 (1939).

Verf. betrachtet zunächst die Fehlerfunktion als Sonderfall einer Whittakerschen Funktion und berechnet ein unendliches Integral, dessen Integrand ein Produkt einer Potenz, einer Exponentialfunktion, einer Whittakerschen Funktion und einer Fehlerfunktion ist. Das Ergebnis ist eine Formel, die unter bestimmten Voraussetzungen in bezug auf die Indizes der verschiedenen Funktionen gilt und die für besondere Werte dieser Indizes eine Reihe von Sonderfällen ergibt. Als zweiten Fall betrachtet Verf. das Exponentialintegral, das er ebenfalls als besondere Whittakersche Funktion darstellt, und berechnet ein Integral, das dem obigen analog gebaut ist. Durch entsprechende Wahl der verschiedenen Indizes erhält er wieder eine Reihe von Sonderfällen. Als dritten Fall betrachtet er die unvollständige Gammafunktion, die ebenfalls als Sonderfall einer Whittakerschen Funktion dargestellt werden kann, und führt analoge Berechnungen hierfür aus. Der nächste Fall bezieht sich auf die Charlierschen Polynome, die Verf. als besondere Whittakersche Funktionen darstellt. M. J. O. Strutt.

Horn, J.: Über hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen. Math. Ann. 117, 384—414 (1940).

Die in früheren Arbeiten [Math. Ann. 111, 638—677 (1935); dies. Zbl. 12, 304 und 113, 242—291 (1936); dies. Zbl. 14, 348] begonnene Behandlung der hypergeometrischen Funktion zweier Veränderlicher $\Gamma_2(\beta, \beta', x, y) = \sum_{m, n} \frac{(\beta, n-m)(\beta', m-n)}{(1, m)(1, n)} x^m y^n$ mit

$\beta + \beta' \neq 0$ wird fortgesetzt (§§ 1—3). Dabei erscheint Γ_2 als eine von 3 linear unabhängigen Lösungen eines linearen Systems von 6 partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung in x und y , welches die singulären Linien der Bestimmtheit $x = 0$ und $y = 0$ besitzt, sowie die singulären Linien der Unbestimmtheit $x = \infty$ und $y = \infty$. Das Verhalten der genannten Lösungen ist bereits bekannt: An irgendeiner Stelle von $x = 0$ und von $y = 0$ mit Ausnahme der Stellen $x = 0, y = \infty$ und $x = \infty, y = 0$. Nunmehr wird das Verhalten untersucht: I. bei Annäherung an $x = \infty$; II. bei geradliniger Annäherung an die Stelle $x = \infty, y = \infty$ (wobei x, y reell sein sollen); III. bei hyperbolischer Annäherung an die Stelle $x = \infty, y = 0$ (wobei wiederum x und y reell sein sollen). Dabei werden allgemeine Sätze herangezogen, die an anderer Stelle [Mh. Math. Phys. 47, 186—194, 359—379 (1938); dies. Zbl. 21, 122; 23, 35] entwickelt wurden. Darstellung der Lösungen durch Laplaceintegrale und asymptotische Reihen. — In § 4 wird in Ergänzung einer früheren Arbeit (a. a. O. Math. Ann. 113, 254—281) die Funktion $H_4(\alpha, \gamma, \delta, x, y) = \sum_{m, n} \frac{(\alpha, m-n)(\gamma, n)}{(\delta, m)(1, m)(1, n)} x^m y^n$ nach der gleichen Methode

behandelt, wie Γ_2 in §§ 1—3.

Haupt (Erlangen).

Petersson, Hans: Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen. Math. Ann. 117, 453—537 (1940).

Verf. hat die Theorie der Metrisierung der Modulformen geradzahlig Dimension (allerdings ohne Konvergenzuntersuchungen) bereits in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 21, 25) behandelt. Die Tragweite der Theorie wurde besonders ersichtlich am Beweis des Vollständigkeitssatzes und der Kennzeichnung der Eisensteinreihen durch innere Eigenschaften. Die Metrisierung liefert nun auch im allgemeinen Fall beliebiger Grenzkreisgruppen Γ erster Art mit parabolischen Substitutionen eine starke Vereinfachung der Beweise der Hauptsätze der Theorie der automorphen Formen und wirft deutliches Licht auf die inneren Zusammenhänge. — Der Vollständigkeitssatz besagt, daß jede automorphe Form zu $\Gamma, -r, v$ explizit dargestellt werden kann durch Poincaré-Reihen. Diese Aufgabe ist nach Angabe einer Poincaré-Reihe mit vorgegebenen endlich vielen Polen im Fundamentalbereich mit gegebenen Hauptteilen (soweit verträglich mit den Existenzbedingungen) und gegebener Entwicklung in den parabolischen Spitzen zurückgeführt auf die Darstellung aller ganzen Spitzenformen durch Poincaré-Reihen. Der Beweis, der früher (dies. Zbl. 4, 12) nur nach mehreren, die Verhältnisse verschleiern den Teiluntersuchungen, und insbesondere für $r = 2$ nur durch Benutzung eines von fünf komplexen Veränderlichen abhängigen analytischen Ausdruckes geführt werden konnte, wird durch die Metrisierung auf die Methoden der linearen Algebra zurückgeführt und erfordert nur eine etwas genauere Kenntnis der Eigenschaften der Poincaré-Reihen selbst, die zuvor untersucht werden (§ 2, 3). Anschließend wird die Metrisierung behandelt, die Definition des Skalarproduktes (f, φ) erfolgt von neuem unter Einbeziehung des Falles $r = 2, v = 1$ (nur für Hauptkongruenzuntergruppen, sobald mit Poincaré-Reihen gearbeitet wird). Die Eigenschaften werden auf kürzerem Wege hergeleitet, daneben die Konvergenzfragen streng behandelt (§ 4). — Im § 5 gehen dem Vollständigkeitssatz die Charakterisierung der Eisensteinreihen und gewisser Poincaré-Reihen durch Orthogonalitätsaussagen und der Hauptsatz über die linearen Relationen zwischen den Poincaré-Reihen folgender Gestalt voraus:

$$g(\tau, A, n_\nu) = (n_\nu + \eta)^{r-1} \sum_{M \in \mathfrak{G}(A, \Gamma)} e^{2\pi i(n_\nu + \eta) \frac{M\tau}{N'}} (v(M))^{-1} (m_1 \tau + m_2)^{-r} \quad \text{für } r > 2,$$

$n_\nu \geq 0, A^{-1}\infty$ parabolische Spitze von Γ, \mathfrak{G} ein volles System von Matrizen M aus $A\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen $\{m_1, m_2\}$, $A^{-1}U^{N'}A$ Erzeugende der Gruppe der parabolischen Substitutionen zur Spitze $A^{-1}\infty$, κ durch $v(A^{-1}U^{N'}A) = e^{2\pi i\kappa}$, η durch $\eta = \begin{cases} \kappa & 0 < \kappa < 1 \\ 1 & \kappa = 0 \end{cases}$ definiert. Entsprechend

$$g(\tau, A, n_r) = \left[\binom{n_r + 1}{M \subset \in (A, \Gamma(N))} \sum e^{\frac{2\pi i}{N} (n_r + 1) \frac{M\tau}{N}} (m_1 \tau + m_2)^{-2} |m_1 \tau + m_2|^{-s} \right]_{s=0} \quad \text{für } r = 2.$$

Dieser Hauptsatz (Satz 17) besagt, daß $\sum_{v=1}^{\lambda} \xi_v g(\tau, A, n_v) = 0$ dann und nur dann gilt, wenn zwischen den Koeffizientenvektoren \tilde{b}_{n_v} der Fourierentwicklung des Formenvektors $q_A(\tau)$ bei $\tau = \infty$ die Relation $\sum_{v=1}^{\lambda} \tilde{\xi}_v \tilde{b}_{n_v} = 0$ gilt. $q_A(\tau)$ ist definiert durch $q(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} q_A(A\tau)$, $q(\tau)$ ein beliebiger Vektor von Formen $\{\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_\lambda(\tau)\}$ der Schar \mathfrak{U}_0 der ganzen Spitzenformen zu $\Gamma, -r, v$. Entsprechend gilt für die Poincaré-Reihen $\Omega(\tau, z_j, s_j, A)$, die eine auch durch Metrisierung zu kennzeichnende unendliche Linearkombination der $g(\tau, A, v)$ darstellen, nämlich

$$\Omega(\tau, z_j, s_j, A) = \left(-\frac{2\pi i}{N'} \right)^{s_j} (a_1(-z_j) + a_2)^{-r} \sum_{v=0}^{\infty} (v + \eta)^{s_j} e^{-\frac{2\pi i}{N'} (v + \eta) \frac{A\tau}{N'}} g(\tau, A, v),$$

daß die Relation $\sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{\xi}_j \Omega(\tau, z_j, s_j, A) = 0$ dann und nur dann gilt, wenn die Relation $\sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{\xi}_j q(\{\tilde{s}_j, A\}, -\tilde{z}_j) = 0$ besteht. Die $q(\{\tilde{s}, A\}, -z)$ heißen die Derivierten von $q(\tau)$ in bezug auf A , sie sind durch

$$q(\{\tilde{s}, A\}, \tau) = \left(\frac{2\pi i}{N'} \right)^s (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n(A) (n + \eta)^s e^{\frac{2\pi i}{N'} (n + \eta) \frac{A\tau}{N'}},$$

bei $q(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n(A) e^{\frac{2\pi i}{N'} (n + \eta) \frac{A\tau}{N'}}$ definiert. — Der Vollständigkeitsatz in seiner

schärfsten Form benötigt die im § 1 entwickelte verallgemeinerte Theorie der Weierstraßpunkte für automorphe Formen, die für $r = 2, v = 1$ auf die Abelschen Differentiale erster Gattung des zu Γ gehörenden algebraischen Gebildes führt. In diesem Sinne bilden, wenn τ_0 parabolischer Fixpunkt ($\tau_0 = A^{-1} \infty$) bzw. innerer Punkt der oberen Halbebene (nicht elliptischer Fixpunkt) ist, die Poincaré-Reihen

$$g(\tau, A, n_1), \quad g(\tau, A, n_2), \quad \dots, \quad g(\tau, A, n_\mu)$$

bzw.

$$\Omega(\tau, -\bar{\tau}_0, n_1, I), \quad \Omega(\tau, -\bar{\tau}_0, n_2, I), \quad \dots, \quad \Omega(\tau, -\bar{\tau}_0, n_\mu, I),$$

dann und nur dann eine Basis von \mathfrak{U}_0 , wenn n_1, n_2, \dots, n_μ ein Hauptsystem in τ_0 darstellen. Das bei lexikographischer Anordnung kleinste Hauptsystem m_1, m_2, \dots, m_μ liefert die Lückenzahlen $m_j + 1$ der Polordnungen der außerhalb von $\tau = \tau_0$ regulären automorphen Formen zu $\Gamma, r - 2, \frac{1}{v}$ (Satz 18). Bei einem zweiten Vollständigkeitsatz wird das dritte Argument

von Ω festgehalten; zu beliebigem, komplexem s bilden die Wertsysteme z_1, z_2, \dots, z_μ , für die die Reihen $\Omega(\tau, z_j, s, A)$ keine Basis liefern, eine höchstens $\mu - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (Satz 19). — § 6 liefert erstmalig Beziehungen zwischen der Metrisierung der automorphen Formen der Dimension -2 und den Integralperioden des Γ zugeordneten algebraischen

Gebildes. Sind z. B. $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ zwei Spitzenformen, so sind $w_j(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi_j(z) dz$ die zugehörigen Integrale, $\eta_j(L) = \int_{\tau_0}^L \varphi_j(z) dz$ die Integralperioden. U. a. liefert $\int_{\mathfrak{R}} \bar{w}_1 dw_2$, längs

des Randes des aus dem kanonischen Fundamentalbereich durch Abänderung an den Spitzen und Ecken entstandenen Bereiches (vgl. dies. Zbl. 18, 357) integriert, einerseits durch Anwendung der Greenschen Formel für die Ebene, andererseits durch Zerlegung des Integrals in Teilintegrale über die Kanten, die Beziehung

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2i} \sum_{v=1}^p \eta_1(G_v) \overline{\eta_2(H_v)} - \overline{\eta_2(G_v)} \eta_1(H_v).$$

E. Schulenberg (Berlin).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Lahaye, Edmond: Les itérations intégrales convergentes et leur application aux équations différentielles du premier ordre, algébriques en y et y' . C. R. Acad. Sci., Paris 210, 621—624 (1940).

Eine Integrationsmethode betreffend Differentialgleichungen von der Form

$\Phi(x, y, y')=0$, wobei Φ ein Polynom in y und y' bedeutet. Es wird zuerst der Fall (D) $y' = P(x, y)/Q(x, y)$ behandelt, wobei P, Q Polynome in y bedeuten, deren Koeffizienten analytische Funktionen von x sind. Den Ausgangspunkt bildet die Substitution $y = u : v$, wobei

$$u = u_0 + \int_{x_0}^x C v dx, \quad F(u, v, x) = F(u_0, v_0, x_0) + \int_{x_0}^x G(u, v, x) dx$$

ist. Die F, G bedeuten bestimmte Polynome in u, v , deren Koeffizienten, sowie auch die Funktion C , mittels der Koeffizienten in P, Q definiert werden, und $x_0, y_0 = u_0 : v_0$ die Anfangswerte. Für $n \rightarrow \infty$ sind die durch

$$u_n = u_0 + \int_{x_0}^x C v_{n-1} dx, \quad F(u_n, v_n, x) = F(u_0, v_0, x_0) + \int_{x_0}^x G(u_{n-1}, v_{n-1}, x) dx$$

und $v_n(x_0) = v_0$ definierten Funktionenfolgen u_n, v_n gleichmäßig konvergent, und der Quotient ihrer Grenzwerte ist das durch x_0, y_0 hindurchgehende Integral der Differentialgleichung (D). Diese Methode bietet gegenüber der Methode der sukzessiven Approximationen den Vorteil, daß die beweglichen Singularitäten der Integrale einer Untersuchung zugänglich gemacht werden. Der allgemeine Fall $\Phi(x, y, y') = 0$ wird ähnlich behandelt.

O. Borůvka (Brünn).

Schin, D.: Über die Lösungen einer quasi-Differentialgleichung der n -ten Ordnung. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 479—527 u. deutsch. Zusammenfassung 528—532 (1940) [Russisch].

Untersuchungen betreffend Lösungen der Differentialgleichung (D) $f^{(n)} - \lambda f = f^*$,

wobei $f^{(k)} = i P_{k,k} \frac{d}{dx} f^{(k-1)} + P_{k,k-1} f^{(k-1)} + \dots + P_{k,0} f^{(0)}$; $f^{(0)} = P_{0,0} f$,

$i = \sqrt{-1}$ und λ einen komplexen Parameter bedeuten. Die Buchstaben $j, k; \alpha, \beta$ nehmen folgende Werte an: $j = 0, \dots, n$; $k = 1, \dots, n$; $\alpha = 0, \dots, n - [n/2]$; $\beta = 0, \dots, [n/2]$. Über die P, f^* werden die folgenden Voraussetzungen gemacht: 1. $P_{j,v}(x)$ für $v \leq j$, $f^*(x)$ sind in einem endlichen oder unendlichen Intervalle (a, b)

komplexe L -meßbare Funktionen; 2. $\frac{1}{P_{j,j}(x)}$, $P_{k,v}(x)$ für $v < k$, $f^*(x)$ sind in jedem im Innern von (a, b) liegenden endlichen abgeschlossenen Intervalle (c, d) Funktionen L_2 ;

3. $P_{n-\beta, n-\alpha} P_{n-\alpha, n-\alpha} : P_{n-\beta, n-\beta} = P_{\alpha, \beta}$ für $\beta \leq \alpha$. Unter den Voraussetzungen 1., 2. besitzt (D) in dem Intervalle (c, d) genau eine Lösung, die in einem beliebigen Punkte $x_0 \in (c, d)$ beliebig vorgegebene Anfangswerte f_0, \dots, f_{n-1} annimmt. Sind alle drei Bedingungen 1.—3. erfüllt und ist außerdem $\Im m(\lambda) \neq 0$, so gibt es für jedes $(a <) c (< b)$ in den Intervallen (a, c) , (c, b) linear unabhängige Lösungen L_2 der homogenen Differentialgleichung $f^{(n)} - \lambda f = 0$, und ihre Anzahl ist immer durch einen der folgenden Fälle I—IV gegeben:

$\Im m(\lambda) > 0$		$\Im m(\lambda) < 0$		(a, b)	
(a, c)	(c, b)	(a, c)	(c, b)	$\Im m(\lambda) > 0$	$\Im m(\lambda) < 0$
I $n - [n/2]$	$[n/2]$	$[n/2]$	$n - [n/2]$	0	0
II n	$[n/2]$	n	$n - [n/2]$	$[n/2]$	$n - [n/2]$
III $n - [n/2]$	n	$[n/2]$	n	$n - [n/2]$	$[n/2]$
IV n	n	n	n	n	n

Zum Beweise dieser Resultate wird eine Methode angewendet, die von Weyl und Windau zu Untersuchungen über Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung verwendet wurde [Math. Ann. 68, 220—269 (1910); 83, 256—279 (1921)]. O. Borůvka.

Heins, Albert E.: On the solution of linear difference differential equations. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 19, 153—157 (1940).

Malti und Warschawski [Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs. 56, 153 (1937)] lösten eine gewöhnliche lineare unhomogene Differenzengleichung mit festen Vorzahlen durch

die Laplacesche Verwandlung \mathfrak{L} . Verf. wendet hier dieses Verfahren auf lineare Differenzen-Differentialgleichungen mit festen Vorzahlen an; im besondern behandelt er die Gleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 y_\lambda}{dt^2} + (2y_\lambda - y_{\lambda-1} - y_{\lambda+1}) = 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 2n+1$$

mit den Randbedingungen $y_0(t) = y_{(2n+1)}(t) = 0$ und gegebenen Werten von y_λ und dy_λ/dt für $t = 0$. \mathfrak{L} führt (1) in eine gewöhnliche unhomogene lineare Differenzengleichung mit festen Vorzahlen über. Deren Lösung führt, durch \mathfrak{L}^{-1} zurückverwandelt, für $y_{\lambda-1}$ zu einem Besselsche Funktionen enthaltenden Ausdrucke, der auch die Wirkung des Grenzübergangs $n \rightarrow \infty$ zu übersehen gestattet. *Koschmieder.*

Sansone, Giovanni: Sulle soluzioni di Emden dell'equazione di Fowler. Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 1, 163—176 (1940).

Mit der Methode der schrittweisen Näherungen zeigt Verf., daß die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right] + \xi^\lambda \theta^n = 0,$$

in der λ und n beliebige positive reelle Zahlen sind, eine und nur eine Lösung besitzt, die in einer Rechtsumgebung der 0 definiert ist, daselbst positiv ist und der Bedingung $\lim_{\xi \rightarrow +0} \theta = C$ mit $0 < C < +\infty$ genügt. Unter Heranziehung der Identität

$$\frac{2\lambda - n + 1}{2} \int_0^\xi \xi^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 d\xi = \xi^{\lambda+1} \theta^{n+1}(\xi) + (\lambda + 1) \xi^2 \theta(\xi) \theta'(\xi) + \frac{n+1}{2} \xi^2 \theta'^2(\xi)$$

zeigt Verf. weiterhin, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das genannte Integral der Gleichung (1) im Endlichen eine Nullstelle besitzt, die Ungleichung $2\lambda - n + 1 > 0$ ist; denn, wenn $2\lambda - n + 1 \leq 0$ ist, so hat das genannte Integral von (1) das gesamte Intervall $(0, +\infty)$ zum Existenzgebiet und ist daselbst positiv und abnehmend mit $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \theta(\xi) = 0$. *C. Miranda (Torino).*

Zwirner, G.: Sui sistemi di equazioni differenziali lineari in un'algebra complessa commutativa di matrici dotata di modulo. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 97, Pt 2, 513—534 (1938).

Übertragung einiger klassischer Theorien auf Matrizenalgebren und abstrakte Algebren in den von Spampinato (vgl. dies. Zbl. 7, 290; 9, 119; 13, 340), Cherubino (vgl. dies. Zbl. 16, 65) und J. M. Thomas (vgl. dies. Zbl. 16, 304) gebahnten Richtungen. Ein Teil der Betrachtungen des Verf. knüpft an den Begriff einer holomorphen Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen in einer komplexen kommutativen Matrizenalgebra mit Haupteinheit an. $f(x, y)$ heißt holomorph, wenn sie in bezug auf jede der veränderlichen Matrizen x, y holomorph ist im Sinne von Cherubino. Die erwähnten Betrachtungen betreffen Differentialgleichungen von der Form $dy/dx = f(x, y)$, für deren Integrale mittels sukzessiver Approximationen ein dem klassischen skalaren Falle entsprechender Existenzsatz bewiesen wird. Im weiteren wird eine Verallgemeinerung der klassischen Matrizentheorie auf Matrizen, deren Elemente einer abstrakten kommutativen Algebra mit Haupteinheit angehören, angestrebt und in dieser Richtung eine elementare Theorie entwickelt. Schließlich werden Systeme von linearen Differentialgleichungen, in denen Koeffizienten, unbekannte Funktionen und die unabhängige Veränderliche einer kommutativen Matrizenalgebra mit Haupteinheit angehören, betrachtet. *O. Borůvka (Brünn).*

Rodabaugh, Louis D.: The partial differential equation $\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Duke math. J. 6, 362—374 (1940).

Verf. beweist fast den gleichen Satz über die Existenz eines Integrals $z = \psi(x, y)$ von $\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, für das $\psi_y > 0$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist, wie Kamke [Math. Ann. 99, 602—615 (1928)]. Verf. erweitert dann den

Satz unter geeigneten Nebenbedingungen auf den Fall, wo das Gebiet zweifach oder dreifach zusammenhängend ist.

Mitio Nagumo (Osaka).

Fantappiè, Luigi: Sulle soluzioni del problema di Cauchy per tutti i sistemi di equazioni a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti d'ordine qualunque. Comment. Pontif. Acad. Sci. **3**, 403—468 (1939).

Verf. betrachtet das System partieller Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{\partial z_r}{\partial x_0} + \sum_{q=1}^p \sum_{k=1}^v a_{rk}^{(q)} \frac{\partial z_k}{\partial x_q} = f_r(x_0, x_1, \dots, x_p), \quad (r = 1, 2, \dots, v)$$

mit den Cauchyschen Bedingungen

$$(2) \quad z_r(x_0^0, x_1, \dots, x_p) = \psi_r(x_1, \dots, x_p), \quad (r = 1, 2, \dots, v)$$

wo die $a_{rk}^{(q)}$ Konstanten und die f_r und ψ_r analytische Funktionen ihrer Argumente in einer Umgebung des Punktes $(x_0^0, x_1^0, \dots, x_p^0)$ bedeuten. Unter Anwendung der klassischen Methode der Entwicklung in Potenzreihen und der eigenen Verfahren aus der Theorie der analytischen Funktionalen beweist Verf. folgendes. Setzt man

$$\|a_{rk}^{(q)}\| = A^{(q)}, \quad \|g_{rk}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)\| = \left(1 + \sum_{q=1}^p \alpha_q A^{(q)}\right)^{-1}, \quad g_{rk}^{(s)} = \frac{\partial^s g_{rk}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_s},$$

$$(3) \quad \begin{aligned} u_{rk}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p} g_{rk} \left(0, 0, \dots, -\frac{1}{\lambda_p}\right) + \\ &+ \sum_{s=1}^{p-1} (-1)^s \sum_{(s)} \int_0^{\tau_s} d\tau_s \int_0^{\tau_{s-1}} \dots \int_0^{\tau_1} \frac{1}{\lambda_1^s \dots \lambda_s^s \lambda_{s+1} \dots \lambda_p} \times \\ &\times g_{rk}^{(s)} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\lambda_1}, \frac{\tau_2 - \tau_3}{\lambda_2}, \dots, \frac{\tau_s - 1}{\lambda_s}, 0, \dots, 0, \frac{-\tau_1}{\lambda_p}\right), \\ \bar{z}_k &= \int_{x_0^0}^{x_0} f_k(t, x_1 + \lambda_1(t - x_0), \dots, x_p + \lambda_p(t - x_0)) dt \\ &+ \psi_k(x_1 + \lambda_1(x_0^0 - x_0), \dots, x_p + \lambda_p(x_0^0 - x_0)), \end{aligned}$$

so lautet die Lösungsformel für das betrachtete Problem

$$\begin{aligned} z_r(x_0, x_1, \dots, x_p) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{C_1} d\lambda_1 \int_{C_2} d\lambda_2 \dots \int_{C_p} d\lambda_p \sum_{k=1}^v u_{rk}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \bar{z}_k(x_0, x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p), \end{aligned}$$

(r = 1, 2, ..., v)

worin C_q ($q = 1, 2, \dots, p$) einen Kreis um den Nullpunkt in der komplexen λ_q -Ebene mit passend großem Radius bedeutet. In (3) ist unter $\sum_{(s)}$ die Summe über zu den hingeschriebenen analoge Glieder zu nehmen, die aus ihnen entstehen, wenn in den Indizes alle einfachen Kombinationen der Klasse s unter den Zahlen $1, 2, \dots, p$ ausgeführt werden. Betrachtet man statt des Systems (1) das folgende

$$(4) \quad \frac{\partial z_r}{\partial x_0} + \sum_{q=1}^p \sum_{k=1}^v a_{rk}^{(q)} \frac{\partial z_k}{\partial x_q} + \sum_{k=1}^v a_{rk}^{(p+1)} z_k = f_r(x_0, x_1, \dots, x_p),$$

so sieht man sofort, daß nach Einführung einer neuen Veränderlichen x_{p+1} und nach den Ansatz $\zeta_r = e^{x_{p+1}} z_r(x_0, x_1, \dots, x_p)$ die Funktionen ζ_r einem System vom Typus (1) genügen, so daß auch die den Bedingungen (2) genügenden Lösungen des Systems (4) durch bloße Quadraturen erhalten werden können.

C. Miranda (Torino).

Bergman, Stefan: The approximation of functions satisfying a linear partial differential equation. Duke math. J. **6**, 537—561 (1940).

Verf. sucht bei linearen elliptischen und hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Variablen Systeme von partikulären Lösungen so zu bestimmen, daß jede beliebige Lösung durch Linearkombinationen von Funktionen des

Systems angenähert werden kann. Die Lösung der hyperbolischen Gleichung wird angesetzt als Summe zweier bestimmter komplexer Integrale von der Form

$$\oint_{\mathfrak{C}} E_i(x_1, x_2, t) f_i \left(x_i \frac{1-t^2}{2} \right) (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad (i = 1, 2)$$

erstreckt über einen Bogen \mathfrak{C} im Einheitskreis, der durch die Punkte ± 1 hindurchgeht. f_i sind willkürliche Funktionen, E_i passend zu bestimmende feste Funktionen. Der elliptische Fall wird durch bekannte komplexe Transformation auf diesen zurückgeführt. Die Spezialisierung $f_i = \left(\frac{1-t^2}{2} \cdot x_i \right)^{n-\frac{1}{2}}$ bzw. $f_i = \left(\frac{1-t^2}{2} \cdot z \right)^{n-\frac{1}{2}}$ ($n = 0, 1, 2 \dots$)

liefert die gewünschten Systeme: $P_\nu(z)$ im elliptischen, $\psi_\nu(x_1, x_2)$ im hyperbolischen Falle ($z = x_1 + ix_2$). Ist $U(z)$ die Lösung der Randwertaufgabe im elliptischen Falle,

so setzt man $U_n(z) = \sum_{\nu=0}^n A_\nu^{(n)} P_\nu(z)$ und bestimmt die $A_\nu^{(n)}$ so, daß das Maximum von

$|U(z) - U_n(z)|$ auf dem Rande ein Minimum wird. In ähnlicher Weise lassen sich beim Eigenwertproblem die Eigenwerte und -funktionen bestimmen. Beim Cauchyschen Problem im hyperbolischen Falle wird das über die vorgegebene Kurve erstreckte

Integral $\int \left[(\Phi - V_n)^2 + \left(\chi_1 - \frac{\partial V_n}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\chi_2 - \frac{\partial V_n}{\partial x_2} \right)^2 \right] ds$ zum Minimum gemacht

$(\Phi, \chi_1, \chi_2$ die Werte von $V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}$ auf dem Rande, $V_n = \sum_{\nu=0}^n A_\nu^{(n)} \psi_\nu(x_1, x_2)$).

Tautz (Breslau).

Sbrana, Francesco: Sopra alcune ricerche riguardanti il calcolo degli operatori funzionali. Acta Pontif. Acad. Sci. 3, 73—78 (1939).

Bemerkungen des Verf. zu dreien seiner früheren Arbeiten. Wegen der ersten setzt er sich mit ihrer Besprechung von Fantappié in dies. Zbl. 5, 164 auseinander. — Zu der zweiten (dies. Zbl. 10, 400) hatte ihn eine Abhandlung von Serini (Rend. Accad. naz. Lincei VI. s. 13, 354—358) angeregt. Die von Serini und vom Verf. gefundenen Lösungen einer Schwingungsaufgabe erschienen a. d. a. O. in verschiedener Gestalt; hier weist Verf. ihre Übereinstimmung nach. — Die dritte (dies. Zbl. 10, 167) empfahl den Gebrauch der Funktionalrechnung mehrerer Veränderlichen bei der Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit festen Vorzeichen; dies läßt sich, wie Verf. hier zeigt, als Ausdehnung eines Verfahrens von Giorgi auffassen.

Koschmieder (Graz).

Drinfeld, G.: Sur les opérateurs, permutant les invariants intégraux d'un groupe de transformations continues. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 4, 157—163 u. franz. Zusammenfassung 164 (1940) [Russisch].

Es sei G eine einparametrische durch die infinitesimale Transformation $X(f)$ erzeugte Gruppe. Dann und nur dann, wenn ein infinitesimaler Operator $Y(f)$ die Integralinvarianten aller Ordnungen von G in der Weise transformiert, daß jede Integralinvariante $\int A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_p}$ in $\int B_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_p}$ übergeht, wobei $B_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = Y(A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) + \sum_j A_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} j \alpha_{i+1} \dots \alpha_p} (\partial Y^j / \partial x^{\alpha_i})$ ist, erzeugen die $X(f), Y(f)$ eine

zweiparametrische Transformationsgruppe, in der die Gruppe G eine invariante Untergruppe ist.

O. Borůvka (Brünn).

Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie

Reppmann, G. V.: Sur la question de justification mathématique de la méthode de Galerkin pour résoudre les problèmes de stabilité. J. appl. Math. a. Mech., N. s. 4, 3—6 u. franz. Zusammenfassung 6 (1940) [Russisch].

Soit $L[y] = 0$ une équation différentielle homogène du second ordre dont les coefficients dépendent d'un paramètre λ et supposons que la fonction inconnue $y(x)$ satisfait à certaines conditions (homogènes) aux limites. Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ est un système orthogonal complet de fonctions φ_i qui satisfont à l'équation différentielle et aux conditions aux limites, les valeurs singulières de λ sont déterminées par la con-

dition qu'il soit possible de trouver les constantes c_1, c_2, \dots telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n L[\varphi_n] dx = 0. \quad (m = 1, 2, \dots)$$

L'auteur critique cette méthode (due à Galerkin) et il en donne une interprétation en réduisant le problème à la résolution d'une équation intégrale. *B. Hostinský.*

Finkelstein, G. M.: On the structure of the Green function of an ordinary differential operator. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 4, 165—171 u. engl. Zusammenfassung 172—174 (1940) [Russisch].

Die Greensche Funktion des Differentialoperators $L(y) = \sum_{k=0}^n l_k(x) \frac{d^k y}{dx^k}$ bei Randbedingungen vom Sturmischen Typ hat die Form $K(x, s) = \sum_{i=1}^q \psi_i(x) \chi_i(s)$ ($x \leq s$), $= \sum_{i=q+1}^n \psi_i(x) \chi_i(s)$ ($x \geq s$); $\psi_i(x)$ bzw. $\chi_i(s)$ sind Lösungen der Gleichung $L(y) = 0$ bzw. der adjungierten. Es wird folgende Beziehung zwischen diesen Funktionen bewiesen:

$$W(\chi_1, \dots, \chi_n) \cdot W(\psi_1, \dots, \psi_k) = (-1)^{kn - \frac{n(n-1) + k(k+1)}{2} - l} \cdot l_0^{-k}(x) \cdot W(\chi_n, \dots, \chi_{k+1}).$$

($k = 1, 2, \dots, n-1$; $l = \min(q, k)$; W = Wronskische Determinante).

Daraus leitet Verf. eine neue Bedingung dafür ab, wann die zwei Kerne $\pm K^{(p,q)}(x, s)$ [vgl. M. Krein, C. R. Acad. Sci. URSS N. s. 4, 395—398 (1937) und 25, 643—646 (1939): dies. Zbl. 16, 23; 22, 347] vom Kelloggschen Typ sind. *Tautz (Breslau).*

Kupradze, V., und D. Awazaschwili: Eindeutigkeitsatz in der Theorie der Fortpflanzung elektromagnetischer harmonischer Schwingungen im inhomogenen dreidimensionalen Raum. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 35—41 u. deutsch. Zusammenfassung 38—41 (1940) [Russisch].

Der übliche Beweis der Einzigkeit der Lösung der Maxwellschen Gleichungen bei vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen (Beugungsproblem elektromagnetischer Wellen) versagt gerade in dem praktisch wichtigen Fall rein harmonischer Schwingungen, da dann durch Elimination der Zeit die Anfangsbedingungen ganz in Wegfall kommen. Die vorliegende Note erbringt nun diesen Eindeutigkeitsbeweis, für den nach Behauptung der Verff. bisher nur Ansätze vorliegen, und zwar mit Hilfe einer von Kupradze angegebenen [Trav. Inst. Math. Tbilissi 2, 143—162 (1937); dies. Zbl. 18, 259], dem in Rede stehenden Randwertproblem äquivalenten Integralgleichung.

Schoblik (Brünn).

Kienast, Alfred: Die Greensche Funktion der Differentialgleichung der Wärmeleitung auf der Kugelfläche. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, Beibl. Nr 32, 133—137 (1940).

L'equazione differenziale che regge la propagazione del calore sopra una superficie sferica conduttrice di raggio uno è la seguente:

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \frac{u_\varphi}{\sin \psi} + \frac{\partial}{\partial \psi} (u_{\psi'} \sin \psi) \right] = \frac{\partial u}{\partial t},$$

ove ψ e φ designano la colatitudine e la longitudine del punto P della superficie e $u(P, t)$ la temperatura nel punto P al tempo t , con la condizione per la u di risultare regolare in ogni punto della sfera e per ogni valore del tempo e di coincidere per $t = 0$ con una prescritta funzione del punto P , pur essa regolare. La funzione di Green per un tale problema è definita, come è noto, dalla relazione:

$$H(P, P', t) \sim \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma) e^{-n(n+1)t},$$

dove $\cos \gamma = \cos \psi \cos \psi' + \sin \psi \sin \psi' \cos(\varphi - \varphi')$, φ' e ψ' designando le coordinate del punto P' . L'autore, valendosi dei procedimenti di sommazione di Riesz e di

Fejér, applicati alla indicata definizione della H , riesce, con eleganza e rigore, a riconoscere per essa le proprietà caratteristiche della detta funzione di Green.

M. Picone (Roma).

Simonoff, N.: Über die erste Randwertaufgabe der nichtlinearen elliptischen Gleichung. Bull. Math. Univ. Moscou, Sér. internat. 2, Fasc. 1, 1—18 (1939).

Verf. wendet das Verfahren von O. Perron [Math. Z. 18, 42—54 (1923)] zur Lösung des Dirichletschen Problems bei der nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$$

an. Für Punkte (x, y) aus einem beschränkten Gebiet und beliebige Werte der anderen Variablen besitze F stetige und beschränkte erste Ableitungen nach u, \dots, t . $F'_r > 0$, $F'_u \leq k < 0$. Für jeden Punkt P des Randes R eines beschränkten Gebietes G soll ein Kreis K_P existieren, dessen Durchschnitt mit $G + R$ nur aus P besteht. Dann gibt es zu jeder stetigen Randfunktion eine und nur eine Lösung in G . Die Hauptschwierigkeit besteht in der Konstruktion einer Ober- bzw. Unterfunktion, die sich in einem beliebig vorgegebenen Punkte des Randes beliebig wenig von dem betreffenden Randwert unterscheidet. Durch ein Überdeckungsverfahren mit Hilfe solcher Funktionen wird direkt die Übereinstimmung der oberen Grenze der Unterfunktionen mit der unteren Grenze der Oberfunktionen bewiesen. Die Methode führt auch im Falle von n Veränderlichen zum Ziele. In bekannter Weise kann man sich von der Bedingung $F'_u \leq k < 0$ bei Beschränkung auf schmale Gebiete befreien. *Tautz (Breslau).*

Jacob, Caius: Conditions d'uniformité ou de multiformité dans le problème plan de Dirichlet. Mathematica, Cluj 15, 12—24 (1939).

Folgende Aufgaben werden behandelt: 1. Im Innern eines von endlich vielen Kurven (C_0, C_1, \dots, C_p) begrenzten Gebietes eine harmonische Funktion zu finden, die auf den Rändern vorgeschriebene Werte annimmt, während die konjugierte vorgeschriebene Umlaufperioden um die inneren Konturen besitzt. 2. Auf einem Teil der Konturen sind jetzt die Werte von u , auf dem anderen die von v vorgeschrieben; für den letzteren sind die Perioden von u , für den ersteren die von v gegeben. In beiden

Fällen wird u angesetzt in der Form $f(z) = u + iv = \frac{1}{i} \sum_{j=0}^p \int_{(C_j)} \mu_j(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ und ergibt sich

als Summe einer eindeutigen analytischen Funktion, die bis auf Konstanten die Randbedingungen erfüllt, und einer Funktion mit konstanten Randwerten. Für die Lösbarkeit ist notwendig und hinreichend, daß die p Perioden ein gewisses System von p linearen Relationen erfüllen. *Tautz (Breslau).*

Aronszajn, N.: Approximation des fonctions harmoniques et quelques problèmes de transformation conforme. Bull. Soc. Math. France 67, 137—161 (1939).

Verf. gibt möglichst allgemeine Typen von ebenen Gebieten S an, in welchen die Klasse D_S der Funktionen, die in S harmonisch, mit ihren ersten Ableitungen beschränkt und in $S + C$ ($C = \text{Rand von } S$) stetig sind, abgeschlossen in bezug auf die in S harmonischen Funktionen von p -ter summierbarer Potenz ist. Zu diesen Bereichen gehören die Sternbereiche mit stetiger Randfunktion $r(\varphi)$ und die mit diesen konform verwandten Gebiete, d. h. solche, deren Abbildungsfunktion beschränkte Ableitungen besitzt. Auch endlich vielfach zusammenhängende Gebiete S gehören dazu, sofern diejenigen, von den einzelnen Randkomponenten begrenzten, einfach zusammenhängenden Gebiete, welche S enthalten, zu den vorher erwähnten gehören. *Tautz.*

Nicolesco, Miron: Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques. Disquisit. Math. et Phys., București 1, 43—56 (1940).

M_0 sei ein fester Punkt des n -dimensionalen euklidischen Raumes, M ein veränderlicher Punkt desselben Raumes, r der Abstand M_0M , $T(r', r'')$ das durch die Ungleichungen $r' < r < r''$ definierte Gebiet, wobei r' und r'' vorgegebene Größen sind mit $0 \leq r' < r'' \leq +\infty$, $u(M)$ eine Funktion, die im Gebiet T die Differential-

gleichung $\Delta^p u = 0$ erfüllt, d. h. in T polyharmonisch von der Ordnung p ist (nach einer begründeten Bezeichnung von M. Picone [dies. Zbl. **14**, 261] p -hyperharmonisch). Bekanntlich (vgl. M. Picone, a. a. O.) gilt für $n = 2$ im Gebiet T die folgende Zerlegung von $u(M)$:

$$(1) \quad u(M) = \Pi(M) \log r + u_0(M) + r^2 u_1(M) + \dots + r^{2p-2} u_{p-1}(M),$$

in der $\Pi(M)$ ein bestimmtes Polynom vom Grade $2p - 3$, das für $r = 0$ verschwindet und polyharmonisch von der Ordnung $p - 1$ ist, bedeutet und $u_0(M), u_1(M), \dots, u_{p-1}(M)$ in T harmonische Funktionen sind; für $n = 3$ gilt entsprechend die folgende Zerlegung

$$(2) \quad u(M) = u_0(M) + r^2 u_1(M) + \dots + r^{2p-2} u_{p-1}(M),$$

in der ebenso $u_0(M), u_1(M), \dots, u_{p-1}(M)$ harmonische Funktionen in T sind. Mit einem eleganten neuen Verfahren zeigt Verf. unter der Voraussetzung $r' = 0$, daß

a) die Gleichung (2) für irgendwelche ungeraden Werte von n gilt, und ebenso für gerade n , wenn $p < \frac{n}{2}$ ist; b) daß eine Zerlegung vom Typus (1) in jedem anderen Falle gilt.

M. Picone (Roma).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Fjeldstad, J. E.: Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integralgleichung. Norsk mat. Tidsskr. **22**, 41—51 (1940) [Norwegisch].

In dieser Arbeit wird das Auftreten der Abelschen Integralgleichung und deren Auflösung bei der Wärmeleitungsgleichung gezeigt, wenn man in dieser zwei Integrale u_1, u_2 mit den Bedingungen $u_1 = f(t)$, $\partial u_2 / \partial z = -\varphi(t)$ für $z = 0$, $u_1 = u_2 = 0$ für $t = 0$ bestimmt. Verlangt man nun, daß die beiden Integrale übereinstimmen sollen, so ergeben sich zwischen $f(t)$ und $\varphi(t)$ zwei Gleichungen, die mit der Abelschen Integralgleichung und deren Auflösung identisch sind. — Es ergeben sich ähnliche Integralgleichungen und deren Auflösung, indem man andere Integrale der Wärmeleitungsgleichung ermittelt. Dadurch wird man auf Integralgleichungen von der Form

$$f(t) = \lambda \varphi(t) + 2 \int_0^t \varphi(\tau) \sum e^{-\beta_n^2(t-\tau)} d\tau$$

geführt, wo die Exponenten β_n die Bedingung $2 \sum 1/\beta_n^2 = k$ erfüllen. Es existiert in diesem Fall eine ganze Funktion $G(z) = \prod \left(1 - \frac{z^2}{\beta_n^2}\right)$, und wenn α_m die Wurzeln der Gleichung $\lambda - G'(z)/z G(z) = 0$ sind, so ergibt sich die Lösung der Integralgleichung in der Form

$$\varphi(t) = \gamma_0 f(t) + 2f(0) \sum \gamma_m e^{-\alpha_m^2 t} + 2 \int_0^t f'(\tau) \sum \gamma_m e^{-\alpha_m^2(t-\tau)} d\tau.$$

Dabei sind die Koeffizienten γ_m durch die Entwicklung

$$\frac{G(z)}{\lambda z G - G'} = \frac{\gamma_0}{z} + 2 \sum \frac{\gamma_m z}{z^2 - \alpha_m^2}$$

gegeben. — Am Schluß der Arbeit wird gezeigt, wie man diese Integralgleichungen auch mit Hilfe der Laplacetransformation behandeln kann.

Gran Olsson.

Lichnerowicz, André, et Raymond Marrot: Remarques sur l'équation intégrale différentielle de Boltzmann. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 391—393 (1940).

Le problème fondamental de la théorie cinétique des gaz consiste dans la recherche du nombre $F(x, y, z, u, v, w, t) dx dy dz du dv dw$ des molécules du gaz qui, à l'instant t , ont leur centre dans l'élément de volume $(x, x + dx; y, y + dy; z, z + dz)$, et leur point de vitesse dans l'élément $(u, u + du; v, v + dv; w + dw)$. La fonction F satisfait à l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial u} + Y \frac{\partial F}{\partial v} + Z \frac{\partial F}{\partial w} = T[F], \quad (1)$$

où $T[F]$ désigne une certaine fonctionnelle quadratique. Si le champ de forces exté-

rieures X, Y, Z dérive d'un potentiel U , et si F ne dépend de u, v, w que par l'intermédiaire de $u^2 + v^2 + w^2 = r^2$, l'auteur trouve que toute solution de (1) est de la forme $F(\varphi, t)$, $\varphi = \frac{1}{2}r^2 - U$ où $m\varphi$ représente l'énergie totale d'une molécule de masse m [voir aussi Carleman, *Acta math.* **60**, 91—146 (1933); ce Zbl. **6**, 400]. Il donne ensuite un théorème d'existence de solution de (1) et d'unicité. Si la fonction initiale de distribution des vitesses est isotrope au point de vue des vitesses, il est possible de lui faire correspondre une solution constamment isotrope et qui vérifie par suite, à chaque instant, le principe d'équipartition de l'énergie.

B. Hostinský (Brünn).

Godefroy, Marcel: Sur l'application d'une méthode directe au problème de L. Lichtenstein. *C. R. Acad. Sci., Paris* **210**, 290—291 (1940).

Frühere Methoden des Verf. [*C. R. Acad. Sci., Paris* **209**, 593 (1939); dies. Zbl. **22**, 339] werden zum Beweis des folgenden Satzes herangezogen: In einer Kugel vom Durchmesser D sei ein räumlicher meßbarer Bereich T_0 enthalten, die Funktionen ξ_0, η_0, ζ_0 seien in T_0 meßbar, verschwinden außerhalb T_0 , und ihre Absolutwerte liegen unterhalb einer Schranke B . Unter diesen Voraussetzungen gibt es drei Funktionen x, y, z , die dem System von Integro-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} x(a, b, c, t) = u(a, b, c, t), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w,$$

$$u(a, b, c, t) = \frac{1}{2\pi} \iiint_T \frac{\eta'(z-z') - \zeta'(y-y')}{r^2} d\tau',$$

$$\xi = \xi_0(a, b, c) \frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c}$$

und den Anfangsbedingungen $x = a, y = b, z = c$ für $t = t_0$ sowie in einem allein von B, D und M abhängigen Intervall (t_0, t_1) der Lipschitzbedingung genügen:

$$|x(a_2, b_2, c_2, t) - a_2 - x(a_1, b_1, c_1, t) + a_1| < M d_{12}.$$

Dadurch wird die Existenz und Eindeutigkeit einer stationären Bewegung einer unbegrenzten, unzusammendrückbaren Flüssigkeit unter den folgenden Annahmen gewährleistet. Zur Zeit t_0 seien Druck und Geschwindigkeit der Flüssigkeit stetige Ortsfunktionen; das Feld der äußeren Kräfte sei stetig und hänge von einem Potential ab; die Geschwindigkeit im Unendlichen verschwinde, und ihre Komponenten erfüllen Lipschitzbedingungen; endlich sei außerhalb eines meßbaren und ganz im Endlichen gelegenen Bereiches die Wirbelstärke Null. *Garten (Dessau).*

Winton, Lowell S.: A compatible integro-differential system. *Duke math. J.* **6**, 562—578 (1940).

Es seien die Systeme der folgenden Integro-Differentialausdrücke vorgelegt ($i, j = 1, \dots, n$):

$$L^i[u(x; s)] \equiv \frac{\partial u^i(x; s)}{\partial x} + \Phi_j^i(x; s) u^j(x; s) + \int_{\alpha}^{\beta} K_j^i(x; s, t) u^j(x; t) dt,$$

$$U^i[u(x; s)] \equiv \alpha_j^i(s) u^j(a; s) + \beta_j^i(s) u^j(b; s) + \int_{\alpha}^{\beta} [A_j^i(s, r) u^j(a; r) + B_j^i(s, r) u^j(b; r)] dr;$$

dabei sind $\Phi_j^i, \alpha_j^i, \beta_j^i, A_j^i, B_j^i$ bekannte stetige Funktionen für $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq s, t, r \leq \beta$. Gesucht wird ein System von Funktionen $u^i(x; s)$, die nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig sein und dem Gleichungssystem $L^i[u(x; s)] = f^i(x; s)$ unter den Randbedingungen $U^i[u(x; s)] = X^i(s)$ genügen sollen; das homogene System $L^i = 0$ nebst der Nebenbedingung $U^i = 0$ soll dabei, wie weiter angenommen wird, „compatible“ von der Ordnung k sein, d. h. k linear unabhängige Lösungen besitzen. Es werden zunächst eine Reihe Hilfssätze für solche Gleichungssysteme bewiesen, die schließlich zu einer notwendigen und hinreichenden Bedingung für die f^i und die X^i führen, unter der das betrachtete inhomogene Problem lösbar ist. Weiter wird gezeigt, daß verallgemeinerte „Greensche Funktionen“ $H_j^i(x, y; s)$ und $G_j^i(x, y; s, t)$

nebst gewissen Hilfsfunktionen $P_j^i(x; s)$ und $Q_j^i(x; s, t)$ existieren, so daß die Lösung des inhomogenen Systems, sofern sie existiert, sich in der Form

$$u^i(x; s) = \int_a^b H_j^i(x, y; s) f^j(y; s) dy + \int_a^b \int_a^\beta G_j^i(x, y; s, t) f^j(y; t) dy dt \\ + P_j^i(x; s) X^j(s) + \int_a^\beta Q_j^i(x; s, t) X^j(t) dt + A^\delta u_\delta^i(x; s)$$

darstellen läßt, unter den A^δ willkürliche Konstante und unter u_δ^i ($\delta = 1, \dots, k$) die linear unabhängigen Lösungen der homogenen Aufgabe verstanden. Maruhn.

Meijer, C. S.: Über eine Erweiterung der Laplace-Transformation. 1. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 599—608 (1940).

Meijer, C. S.: Über eine Erweiterung der Laplace-Transformation. 2. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 702—711 (1940).

Verf. studiert die Transformation

$$(A) \quad f(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K_\nu(st) (st)^{\frac{1}{2}} F(t) dt,$$

und ihre Inversion

$$(B) \quad F(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} I_\nu(ts) (ts)^{\frac{1}{2}} f(s) ds.$$

Für $\nu = \pm \frac{1}{2}$ geht aus (A) $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$ hervor, so daß (A) eine mit der Hankel-

transformation verwandte Verallgemeinerung der Laplacetransformation darstellt. Es werden in verschiedenen Sätzen hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Reziprozität (A) \leftrightarrow (B) aufgestellt. An der Spitze steht folgende Umkehrformel: Wenn 1. $F(t)$ für $t > 0$ definiert und in jedem endlichen Intervall im Riemannschen

Sinn eigentlich integrierbar ist; 2. für $\beta > a \geq 0$ das Integral $\int_0^\infty e^{-\beta t} |F(t)| dt$ konvergiert; 3. $x > 0$, $F(t)$ in der Umgebung $t = x$ von beschränkter Variation ist, so gilt für $-\frac{1}{2} \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ und $\beta > a$

$$(C) \quad \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} I_\nu(xs) (xs)^{\frac{1}{2}} ds \int_0^\infty K_\nu(st) (st)^{\frac{1}{2}} F(t) dt.$$

Setzt man in (C) $\nu = \frac{1}{2}$ bzw. $\nu = -\frac{1}{2}$, so ergibt sich durch Addition der beiden Darstellungen die bekannte „komplexe Umkehrformel“ der Laplacetransformation (vgl. das Buch von G. Doetsch [dies. Zbl. 18, 129], S. 105). U. a. wird umgekehrt gezeigt:

Wenn 1. $f(s)$ in $R(s) > a \geq 0$ analytisch ist, 2. für festes $\beta > a$ das Integral $\int_{-\infty}^\infty |f(\beta + iy)| dy$ konvergiert, 3. $|f(s)| < A$ für $R(s) \geq \beta$, 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + iy) = 0$ gleichmäßig für alle reellen y und 5. $-\frac{1}{2} \leq R(\nu) \leq \frac{1}{2}$ ist, so gilt die Darstellung (A), wo $F(t)$ durch (B) definiert ist. Durch Verifikation zeigt Verf., daß dies auch richtig ist für die Funktion $f(s) = s^\theta$, $R(\theta) < 0$, obwohl die oben gegebenen Voraussetzungen für $-1 \leq R(\theta) < 0$ nicht erfüllt sind, und gelangt auf Grund dieser Feststellung zu einer naheliegenden Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Reziprozität. Für die Beweisführung werden verschiedene Hilfssätze bereitgestellt, bei deren Herleitung verschiedentlich G. N. Watson (A treatise on the theory of Bessel functions, 1922) zitiert wird. In den Schlußbemerkungen weist der Verf. auf fünf bereits in früheren Arbeiten mitgeteilte Spezialfälle der Reziprozität (A) \leftrightarrow (B) hin. Vgl. Formel (24), Formel (19), Formel (12), Satz 8, S. 24 der in dies. Zbl. 22, 335; 22, 134; 18, 20; 13, 208 referierten Abhandlungen des Verf. und ferner G. H. Hardy, Messenger of Math. 56 (1927), Formel (4.1).

H. Hadwiger (Bern).

Dieulefait, C. E.: Über die Thieleschen Halbinvarianten und die Fouriersche konjugierte Funktion. An. Soc. Ci. Argent. **129**, 208—211 (1940) [Spanisch].

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man die Laplacesche Transformation vermöge des Fourierschen Integraltheorems umkehren kann; zur Herleitung wird jedoch der Weg über die Differentialgleichung (unendlich hoher Ordnung) der Laplace-Transformierten und über die Methode der bestimmten Integrale zur Lösung von gewissen linearen Differentialgleichungen gegangen. *F. Knoll (Wien).*

Plancherel, M.: Quelques remarques sur les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **85**, Beibl. Nr 32, 20—26 (1940).

Hille and Tamarkin [Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 768—774 (1933); see this Zbl. **8**, 11] proved that if $g(x)$ is a function of one variable of the class L^p ($1 < p < \infty$),

then $g(x, a) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{\sin a(x-t)}{x-t} dt$ converges in the mean of order p to $g(x)$. The

author extends this lemma and results of Hille, Tamarkin and Offord [ibid. **41**, 427—436 (1935); see this Zbl. **11**, 397—398] to the case of a function of many variables, basing on the same idea as the above authors. In addition, results of Kolmogoroff [Fundam. Math. **5**, 96—97 (1924)] and Marcinkiewicz [J. London Math. Soc. **8**, 179 (1933); see this Zbl. **7**, 160] on the partial sums of Fourier series of a function of the class L^2 are extended to those on Fourier integrals. *S. Ikehara (Osaka).*

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Šmulian, V.: Über lineare topologische Räume. Rec. math. Moscou, N. s. **7**, 425—444 (1940).

Sei E ein linearer Hausdorffscher Raum, Γ eine lineare Menge von linearen Funktionalen auf E ; nimmt man für die Umgebungen $U(x_0; f_1, f_2, \dots, f_n; \delta)$ von $x_0 \in E$ ($f_i \in \Gamma$, $\delta > 0$) die Mengen $E_x |f_i(x - x_0)| < \delta$; $i = 1, \dots, n$; $x \in E$, so entsteht aus E ein neuer Raum $E(\Gamma)$. Man setzt noch voraus, daß aus $f(x) = 0$ für alle $f \in \Gamma$ das Verschwinden von $x \in E$ folgt. Eine Menge S in E heißt beschränkt, wenn man für jede Umgebung G der Null im Raume E eine Zahl α mit $S \subset \alpha G$ angeben kann. Satz 1 enthält Bedingungen dafür, daß eine beschränkte konvexe Teilmenge von E in $E(\Gamma)$ bikompakt sei. [Dazu bemerkt Ref., daß man in der Γ -Abtrennbarkeitsdefinition auf S. 426 $x_0 \text{ non } \in S$ statt $x_0 \in S$ lesen soll!] Ferner werden analog zum metrischen Falle die totale Beschränktheit, die Vollständigkeit usw. erklärt und studiert. In weiteren §§ wird für E ein Banachscher Raum und für Γ der Raum E^* aller linearen Funktionale auf E genommen. § II enthält Bedingungen für das Erfülltsein gewisser v. Neumannscher Axiome für $\mathcal{G} = E(E^*)$ (Satz 6) und für die Separabilität von E^* im Zusammenhang mit den Eigenschaften von \mathcal{G} (Satz 7). Setzt man nun $\Gamma = E$, und vertauscht man die Rolle von E und E^* (d. h. sieht man die $f \in E^*$ als „Punkte“ und die $x \in E$ als „Funktionale“ $f(x)$ mit veränderlichem f an), so hat man statt $E(\Gamma)$ einen Raum $E^*(E) = \mathcal{G}_*$ zu betrachten. Diese Begriffsbildung erlaubt dem Verf. in § III frühere Ergebnisse auf E^* und \mathcal{G}_* zu übertragen. In § IV wird die Definition von $E(\Gamma)$ usw. dadurch modifiziert, daß man Umgebungen $U(x_0; f_1, f_2, \dots, \delta)$ mit abzählbar unendlich vielen f_i zuläßt. *Bedřich Pospíšil.*

Šmulian, V.: Sur la dérivabilité de la norme dans l'espace de Banach. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **27**, 643—648 (1940).

Q sei eine beliebige Menge, $E(Q)$ der Raum der auf Q beschränkten Funktionen $x(q)$ mit der Metrik $\|x\| = \sup |x(q)|$. Eine Folge $q_n \in Q$ heißt extremal für $x(q)$, wenn $\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x(q_n)|$ ist. Dann gilt: Es sei $\|x_0\| = 1$. Damit die Norm $\|x\|$ im Punkt $\|x_0\|$ stark ableitbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jede extreme Folge q_n von x_0 und jedes $x(q) \in E(Q)$ die Folge $\{x(q_n)x_0(q_n)\}$ gleichmäßig für $\|x\| \leq 1$ gegen einen von $x(q)$ unabhängigen Grenzwert konvergiert. Als Folgerung ergibt sich z. B.: Sind

in \bar{E} , \bar{E} die Normen überall stark ableitbar, so ist E regulär. — Ist $\|x\|$ überall stark ableitbar und ist die Konvergenz von $\frac{\|x_0 + hx\| - \|x_0\|}{h}$ gleichmäßig in bezug auf x_0 und x , wenn $\|x_0\| = 1$, $\|x\| \leq 1$, so heißt $\|x\|$ stark gleichmäßig ableitbar. Auch für dieses Verhalten wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium abgeleitet, das folgende Verschärfung eines Satzes von S. Mazur [Studia Math. 4, 70—84, 128—133 (1933); dies. Zbl. 8, 316] ergibt: Für die starke, gleichmäßige Ableitbarkeit eines beliebigen Banachschen Raumes E ist notwendig und hinreichend, daß E gleichmäßig konvex ist.

G. Köthe (Gießen).

Krein, Mark, and Selim Krein: On an inner characteristic of the set of all continuous functions defined on a bicomact Hausdorff space. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 427—430 (1940).

Let E be a linear semi-ordered space. Suppose that there exists in E an element $u > 0$ such that one can find to every element x of E a real number t such that $-tu < x < tu$. The norm $\|x\|$ of x is then defined in the following manner: it is the least number t satisfying these inequalities. The linear operations $f(x)$ over E also form a linear semi-ordered space \bar{E} ($f \geq g$ if $f(x) \geq g(x)$ for $x > 0$). Let H be the subset of E consisting of the operations f such that $f > 0$ and $f(u) = 1$. Let S be the set of the extreme points of H (f is an extreme point of H if there is no couple f_1, f_2 of elements of H , different from f , such that $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$). Consider in E the natural or weak topology defined by means of the system of neighborhoods $U(f_0; x_1, x_2, \dots, x_n, \epsilon)$, such a neighborhood consisting of all those $f \in E$ for which $|f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). S will then be a bicomact Hausdorff space (in the relative topology). Associate with every $x \in E$ the (continuous) function on S : $\varphi_x(f) = f(x)$, then this correspondence $x \leftrightarrow \varphi_x(f)$ possesses the following properties: 1) $x > y$ if and only if $\varphi_x(f) \geq$ and $\neq \varphi_y(f)$ on S , 2) $\|x\| = \sup_{f \in S} |\varphi_x(f)|$, 3) $\varphi_u(f) \equiv 1$ on S , 4) every continuous function $\varphi(f)$ on S is the limit of a uniformly convergent sequence $\varphi_{x_n}(f)$ ($x_n \in E$). If, in addition, E is supposed complete by the norm $\|x\|$, then we have a linear, order and norm preserving correspondence between E and the space of all continuous functions defined on S . — If E is complete, then a commutative multiplication of its elements may be defined. A necessary and sufficient condition that a linear operation f should belong to S is then the following: $f(xy) = f(x)f(y)$ for all elements x and y of E . — The results are illustrated on an example concerning positive definite functions. — Without demonstrations. Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Fan, Ky: Sur une représentation des fonctions abstraites continues. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 429—431 (1940).

Der Weierstraßsche Approximationssatz ist von M. Fréchet auf (abstrakte) stetige Funktionen $X = t(x)$ ausgedehnt worden, wobei Definitions- und Wertebereich gewissen metrisierbaren affinen Räumen angehören (vgl. M. Fréchet, Bull. Calcutta Math. Soc. 20, 185—192 (1930)), während an Stelle der Polynome sog. Funktionen $p(x)$ von ganzer Ordnung treten [vgl. M. Fréchet, J. de Math. 8, 71—92 (1929)]; übrigens wird dabei $f(x)$ als (dreifacher) Limes einer dreifachen Folge von Funktionen $p(x)$ dargestellt. In Verfolgung einer in diesem Zusammenhange von Fréchet aufgeworfenen Frage gibt Verf. (verschiedene) hinreichende Bedingungen für Definitions- und Wertebereich, unter denen man mit einem zweifachen oder einfachen Grenzübergang auskommt bzw. unter denen überdies die Folge gleichmäßig konvergiert. Ferner ergibt sich ein Satz über die Darstellung halbstetiger Funktionaler durch monotone Folgen von Funktionalen ganzer Ordnung. Die erwähnten hinreichenden Bedingungen sind übrigens für alle üblicherweise auftretenden Räume (Hilbertscher Raum, Raum der stetigen oder quadratisch integrierbaren Funktionen usw.) erfüllt. Keine Beweise.

Haupt (Erlangen).

Maeda, Fumitomo: Partially ordered linear spaces. J. Sci. Hiroshima Univ. A 10, 137—150 (1940).

L sei ein distributiver Verband mit Nullelement, in dem die Vereinigung $\bigvee_{x \in S} x$ von beliebigen Mengen S gebildet werden kann und stets $y \cap \bigvee x = \bigvee (y \cap x)$ gilt für beliebiges $y \in L$. Wird in L $b \prec a$ durch $b \cap u = 0$ für alle u mit $a \cap u = 0$ erklärt und $a \sim b$ durch $b \prec a$, $a \prec b$, so bilden die Äquivalenzklassen bezüglich der Beziehung \sim eine verallgemeinerte Boolesche Algebra mit Nullelement. — Y sei ein teilweise geordneter linearer Raum im Sinne von L. Kantorowitch [Rec. math. Moscou, N. s. 2, 121—165 (1937); dies. Zbl. 16, 405], der die Axiome I bis VI a. a. O. erfüllt. Ist $|y| \cap u = 0$ für alle u mit $|x| \cap u = 0$, so wird $y \prec x$ gesetzt (x, y, u aus Y). Wieder wird das System \mathfrak{Y} der zugehörigen Äquivalenzklassen untersucht. Es gilt das obige Resultat, aber noch mehr; \mathfrak{Y} ist sogar eine verallgemeinerte \aleph_1 -Boolesche Algebra. Die Äquivalenzklasse von $y \in L$ sei A_y . Ist nun $B \subseteq A_y$, $B \subseteq \mathfrak{Y}$, so zerfällt y entsprechend der direkten Zerlegung $A_y = B \oplus C$ in \mathfrak{Y} in $y = y_B + y_C$ eindeutig. Ist B beliebig, so wird als eindeutig bestimmte B -Komponente y_B das Element $y_B \cap A_y$ bezeichnet. y_B wird eine vollständig additive Verbandsfunktion auf \mathfrak{Y} . Speziell läßt sich damit die charakteristische Schar E_λ zu einem $y \prec x$, $x > 0$, einführen und die von H. Freudenthal [Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 641—651 (1936); dies. Zbl. 14, 313]

erhaltene Integraldarstellung $y = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d x_{E_\lambda}$ auf neuem Wege ableiten. Schließlich werden noch die Ideale in \mathfrak{Y} untersucht und mit gewissen Idealen in Y in eine eindeutige Beziehung gebracht.
G. Köthe (Gießen).

Kantorowitch, L.: Linear operations in semi-ordered spaces. 1. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 209—279 (1940).

Zweiter Teil der zusammenfassenden Darstellung der vom Verf. aufgestellten Theorie der halbgeordneten Räume [Teil I, Rec. math. Moscou, N. s. 2, 121—165 (1937); dies. Zbl. 16, 405]. Ein linearer Raum Y heißt halbgeordnet, wenn in Y eine Beziehung $y > 0$ erklärt ist, für die gilt: 1. $0 \not> 0$; 2. ist $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, so auch $y_1 + y_2 > 0$; 3. zu jedem $y \in Y$ existiert ein $y_1 > 0$ mit $y_1 - y > 0$; 4. ist λ reell, $\lambda > 0$, $y > 0$, so ist $\lambda y > 0$; 5. jede nach oben beschränkte Menge E besitzt eine kleinste obere Schranke $\sup E$. — Mit $|y|$ wird $\sup(y, -y)$ bezeichnet. Jedes y läßt sich als Differenz zweier positiver Elemente schreiben. Y heißt regulär, wenn noch gilt: Ist $E_n \subset Y$ und existiert $y = \limsup E_n$, so gibt es endliche Teilmengen $E'_n \subset E_n$ mit $\limsup E'_n = y$. Eine Folge $y_n \in Y$ heißt (σ) -konvergent gegen y , $y_n \rightarrow y(\sigma)$, wenn $\lim y_n = \inf(\sup(y_n, y_{n+1}, \dots)) = \lim y_n = \sup(\inf(y_n, y_{n+1}, \dots))$ ist. Eine Folge y_n heißt (t) -konvergent gegen y , $y_n \rightarrow y(t)$, wenn jede Teilfolge y_{n_1}, y_{n_2}, \dots eine gegen $y(\sigma)$ -konvergente Teilfolge besitzt. Ein regulärer Raum heißt vom Typus K_6 , wenn eine Menge E dann und nur dann im Sinn der Beziehung $>$ beschränkt ist, wenn aus $\lambda_n \rightarrow 0$, λ_n reell, und $y_n \in E$ stets $\lambda_n y_n \rightarrow 0$ (σ) folgt. — Kapitel I studiert die linearen Transformationen $y = U(x)$ des halbgeordneten Raumes X in Y . Entsprechend den beiden Konvergenzbegriffen gibt es die Klassen $H_\sigma^0, H_t^0, H_\sigma^1, H_t^1$ von Transformationen, je nachdem eine (σ) - oder (t) -konvergente Folge stets in eine (σ) - oder (t) -konvergente Folge übergeführt wird. Es ist stets $H_\sigma^1 = H_t^1$. U heißt ≥ 0 , wenn $U(x) \geq 0$ ist für $x \geq 0$. U heißt regulär, wenn es ein $U_1 > 0$ gibt mit $U_1 > U$. Es wird gezeigt, daß die Menge H , aller regulären Operationen von X in Y selbst ein halbgeordneter linearer Raum ist. Die (σ) -Konvergenz in H , einer monotonen Folge U_n gegen U ist mit $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = U(x)$ für alle $x \in X$ gleichbedeutend. Sind X und Y vom Typus K_6 , so fallen H_t und H_σ^0 zusammen. Weitere Sätze über Identitäten dieser Klassen untereinander und mit der Klasse der beschränkten Operationen, wenn X oder Y überdies noch Banachsche Räume sind. — Kapitel II beschäftigt sich mit der Darstellung der linearen Operationen durch Integrale. Von den zahlreichen Resul-

taten seien erwähnt: M sei der Raum aller reellen, beschränkten Funktionen in $(0,1)$ mit $\|x\| = \sup |x(t)|$. Die allgemeine Form der im Sinne der Metrik stetigen Transformationen von M in einen anderen Banachraum wird durch das Radonintegral

$$y = U(x) = \int_0^1 x(t) \Phi(de) \text{ gegeben, } \Phi(e) \text{ eine additive Mengenfunktion mit } \sup_{e \in (0,1)} \|\Phi(e)\| < \infty.$$

C sei der Raum der in (a, b) stetigen Funktionen mit $\varphi \geq 0$, wenn $\varphi(t) \geq 0$ überall, und $\|\varphi\| = \sup |\varphi(t)|$. Die Klasse H_r der regulären Transformationen von C in einen K_6

fällt zusammen mit den durch das Stieltjesintegral $U(x) = \int_a^b x(t) dg(t)$ darstellbaren, wo $g(t)$ eine Funktion mit Werten im K_6 ist, die Differenz zweier positiver Funktionen ist.

Ähnliche Ergebnisse gelten für den halbgeordneten Raum \tilde{M}^* der meßbaren Funktionen ($y \geq 0$, wenn $y(t) \geq 0$ fast überall) für die Klassen H_r' und H_r'' . Hier wird auch das Hellingersche Integral herangezogen: H_r'' wird durch die Operationen

$$U(x) = \int_a^b \frac{df(t)dg(t)}{dt} \text{ gegeben, } f(t) = \int_a^t x(\tau) d\tau, g(t) \text{ absolut } (t)\text{-stetig, d.h. aus } \sum (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$$

folgt stets $\sum |g(t_i) - g(t_{i-1})| \rightarrow 0(t)$. Analoge Ergebnisse für die Räume L^p und l^p , aus denen sich speziell eine Verallgemeinerung der Fourierentwicklung und des Riesz-Fischerschen Satzes auf gewisse Funktionen mit Werten in halbgeordneten Banachräumen ergeben.

G. Köthe (Gießen).

Steen, S. W. P.: Introduction to the theory of operators. 5. Metric rings. Proc. Cambridge Philos. Soc. 36, 139—149 (1940).

Die axiomatischen Voraussetzungen sind dieselben wie im 2. Teil der 4. Mitteilung [vgl. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 562—578 (1939); dies. Zbl. 22, 232]. Es wird die Theorie der Spur $\tau(A)$ in Analogie zu F. J. Murray und J. v. Neumann [Trans. Amer. Math. Soc. 41, 208—248 (1937); dies. Zbl. 17, 360] entwickelt und bewiesen, daß zu jedem linearen Funktional $\lambda(A)$ eine Zerlegung der Identität E_μ existiert mit $\lambda(A) = \int \mu d\tau(AE_\mu)$ und $\lambda(A) = \tau(AB)$, falls $B = \int \mu dE_\mu$ beschränkt ist. R sei ein Ring von beschränkten Operatoren. Die in der Form $\tau(AB)$ darstellbaren Linearfunktionen bilden einen Teilraum L' des Raumes L aller Linearfunktionen von R . Ist $L = L'$, so heißt R doppelt beschränkt. Es wird bewiesen, daß ein doppelt-beschränkter Ring stets ein vollständiger metrischer Ring ist, wenn das skalare Produkt (A, B) durch $\tau(AB^*)$ erklärt wird, und umgekehrt (ein metrischer Ring ist ein Hilbertscher Raum, für dessen Elemente A, B auch eine Multiplikation AB und ein Prozeß A^* mit den bekannten Eigenschaften erklärt sind). Dieses Resultat bedeutet die Möglichkeit einer Spektraltheorie in allen vollständigen metrischen Ringen.

G. Köthe.

Dunford, Nelson, and B. J. Pettis: Linear operations on summable functions. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 323—392 (1940).

A detailed development of the results summarized already in a previous paper (see this Zbl. 22, 233). It presents a representation theory for several types of operators mapping a space $L(S)$, consisting of the real functions that are Lebesgue-integrable over an abstract aggregate S with respect to a fixed measure function, into an arbitrary Banach space. The general approach is not new, for it is based on the methods introduced by Gelfand [Rec. math. Moscou, N. s. 4, 235 (1938); this Zbl. 20, 367] and Dunford [Trans. Amer. Math. Soc. 40, 474 (1936); see this Zbl. 15, 305] to obtain such theorems when S is a bounded interval. However, in order to extend these results to the case of an arbitrary S new devices are required since the earlier results were proved by Euclidean methods. This extension has been accomplished by generalising the Radon-Nikodym theorem to set of functions taking their values in an adjoint space and by substituting for differentiation processes the use of convex sets. By means of these representation

theorems new information is given concerning certain types of operators. This information in turn yields a uniform mean ergodic theorem for weakly completely continuous operations in $L(S)$ (i. e. for operations which transform bounded sets into weakly compact sets) and an application to Markoff processes. A fairly complete representation theory is given for operations mapping $L(S)$ into the Lebesgue classes $L^q(T)$, $1 \leq q \leq \infty$, where T is another aggregate. It is impossible, for lack of space, to give here a detailed report on the theorems obtained in this paper. A particularly interesting result is the following: If S is Euclidean and if U is a weakly completely continuous operation in $L(S)$, then U^2 is completely continuous. Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Kitagawa, Tosio: The characterisations of the fundamental linear operations by means of the operational equations. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Imp. Univ. A 1, 1—28 (1940).

L^2 sei der lineare Raum aller komplexwertigen Funktionen $f(x)$, die in $(-\infty, +\infty)$ erklärt und in jedem endlichen Bereich im Lebesgueschen Sinn quadratisch integrierbar sind. Eine lineare Operation A von L^2 auf sich wird als beschränkt bezeichnet, wenn sie die Bedingungen 1. und 2. einer früheren Arbeit [vgl. Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 205—210 (1938); dies. Zbl. 20, 134] erfüllt (die 3. Bedingung a. a. O. ist unnötig). Als erzeugende Funktion eines beschränkten A wird die durch $Ae_{\lambda x} \cong g_A(\lambda, x)e^{\lambda x}$ bis auf Äquivalenz für jedes komplexe λ erklärte Funktion g_A bezeichnet. Es wird bewiesen, daß $g_A(\lambda, x)$ eine abstrakte ganze Funktion von λ mit Werten in L^2 ist. Ist A eine „translatable“ Operation, so hat g_A besonders einfache Eigenschaften. Die dadurch möglichen funktionentheoretischen Methoden ergeben den Beweis der l. c. aufgestellten Charakterisierung gewisser Klassen von Operationen durch Funktionalgleichungen, vor allem der Operationen vom „Laplacetypus“. Ein einfaches Resultat ist z. B.: Die Gleichung $A^{(1)} = \alpha A$ (wobei $A^{(1)}$ die erste Ableitung von A bedeutet) hat genau die Operationen $Af(x) \cong \varphi(x)f(x + \alpha)$ [$f(x)$ bel. in L^2 , α, φ die A charakterisierenden Daten] als Lösungen. G. Köthe (Gießen).

Rutman, M. A.: Sur les opérateurs totalement continus linéaires laissant invariant un certain cône. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 77—93 (1940).

L'auteur établit des théorèmes très généraux comprenant comme cas particuliers certains résultats de Perron sur les matrices finies à éléments positifs ainsi que les résultats correspondants sur les équations intégrales à noyau positif, établis par Jentzsch [voir Perron, Math. Ann. 64, 1—76 (1907); Jentzsch, J. f. Math. 141, 235—244 (1914)]. — Soit E un espace (B) complexe et soit K un ensemble „conique“ de E , situé sur un seul côté d'un certain hyperplan de E . Cela veut dire que K est un sous-ensemble fermé de E , comprenant avec x et y aussi λx (pour $\lambda > 0$) et $x + y$, et tel qu'il existe une fonctionnelle linéaire $f(x)$ de E , positive pour tous les éléments de K sauf 0. — Une transformation linéaire A de E est dite positive (par rapport à K) si elle vérifie les conditions suivantes: 1) si $x \in K$, alors aussi $Ax \in K$, 2) il existe un élément $x_0 \in K$ ($x_0 \neq 0$) et un nombre positif c tels que $Ax_0 - cx_0 \in K$. L'auteur montre que si A est une transformation linéaire positive et totalement continue, alors il y a dans K un vecteur caractéristique de A (c'est-à-dire un $x \in K$ tel que $Ax = \lambda x$). Si, de plus, K est un „cône reproducteur“, c'est-à-dire, si tout élément de E peut être représenté comme la différence de deux éléments de K , alors il existe parmi les valeurs caractéristiques de A de module maximum une, telle que le vecteur caractéristique correspondant appartient à K . — Supposons maintenant que K contienne aussi des points intérieurs. La transformation positive A s'appelle totalement positive si pour un élément-frontière ξ quelconque de K il existe un $n = n(\xi)$ tel que $A^n \xi$ est un point intérieur de K . L'auteur montre que si A est totalement positive et totalement continue, alors elle possède dans K un et un seul vecteur caractéristique, la valeur caractéristique correspondante étant la plus grande parmi toutes les valeurs caractéristiques de A . Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Variationsrechnung:

Cinquini, Silvio: Il calcolo delle variazioni. 1. Lo sviluppo della teoria. Period. Mat., IV. s. 20, 205—217 (1940).

Der Vortrag entwirft in diesem ersten Teil ein Bild von der geschichtlichen Entstehung der Variationsrechnung, ihren ersten Problemen und ihrer Formung durch Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi und Weierstraß. Zum Schluß leitet er auf die neuen direkten Verfahren, insbesondere von Tonelli über, die im zweiten Teile besprochen werden sollen.

Harald Geppert (Berlin).

Mancill, J. D.: The Jacobi condition for unilateral variations. Duke math. J. 6, 341—344 (1940).

Verf. betrachtet das Variationsproblem: $I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y') dt = \min.$ unter

Zugrundelegung der die beiden festen Punkte 1 und 2 der (x, y) -Ebene verbindenden Kurven $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(t_1 \leq t \leq t_2)$ bei den üblichen Bedingungen der klassischen Theorie. Die vorliegende Arbeit gibt einen Beitrag zum Beweis der Jacobischen Bedingung im Falle, daß die betrachtete Minimalkurve mit dem Rand des Gebietes R' , das die Punkte der betrachteten Kurvenklasse enthält, einen Teilbogen gemein hat. Es sei $E_{1,2}$ eine Extremale, die mit dem Rand B von R' einen Teilbogen $E_{3,4}$ gemein hat, es sei ferner längs $E_{1,2}$

$$F_1(x, y, x', y') \neq 0 \quad \text{und} \quad (*) \quad x = \Phi(t, a), \quad y = \Psi(t, a)$$

stelle eine durch den Punkt 1 hindurchgehende Extremalenfamilie dar, die $E_{1,2}$ enthält; Verf. beweist dann, daß, wenn die Extremale $E_{1,2}$ mit der Hülle der Familie $(*)$ einen außerhalb 2 liegenden Berührungspunkt gemein hat, $E_{1,2}$ das Integral I nicht zum Minimum machen kann.

S. Cinquini (Pavia).

Smiley, M. F.: The Jacobi condition for extremaloids. Duke math. J. 6, 425—427 (1940).

Vorliegende Note schließt an eine Arbeit von McShane (dies. Zbl. 21, 33) an, in der die Jacobische Bedingung für die Extremalen in einer Form aufgestellt wurde, die sowohl für das Variationsproblem in Parameterform wie in der gewöhnlichen Fassung Gültigkeit besitzt; Verf. behandelt die Extremaloiden und gibt die Grundbegriffe, die für eine neue Fassung der Jacobischen Bedingung für die Extremaloiden notwendig sind. — Es sei g mit den Gleichungen $g^i(t)$ ($i = 1, \dots, n$; $t_1 \leq t \leq t_2$) eine nichtsinguläre Extremaloide mit den Knickpunkten $t = t_\theta$ ($\theta = 1, \dots, r$), wobei $\Omega_0(t) \equiv f_{y^i}(t^+) \dot{g}^i(t^-) - f_{y^i}(t^-) \dot{g}^i(t^+) \neq 0$. Die Funktionen $u^i(t)$, $\tau(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) definieren eine begleitende Pseudoextremaloide, wenn zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Knickpunkten von g die Funktionen $u^i(t)$, $\tau(t)$ der Klasse C^2 angehören, die $u^i(t)$ der Jacobischen Bedingung genügen und in dem ganzen Intervall (t_1, t_2) die Funktionen $u^i + \tau \dot{g}^i$, $\Omega_{0,t}(u, \dot{u}) + \tau f_{y^i}$, τ stetig sind. Der Vektor $u^i(t)$ heißt im Intervall (t_3, t_4) , wo $(t_1 \leq t_3 < t_4 \leq t_2)$ ist, p -normal, wenn $p_i(t) \dot{u}^i(t) = 0$ ($t_3 \leq t \leq t_4$) und dabei $p_i(t)$ zwischen je zwei Knickpunkten von g der Klasse C^2 angehört, $p_i(t) \dot{g}^i(t) \neq 0$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) ist und außerdem durch die zwischen je zwei Knickpunkten von g der Klasse C^2 angehörende Transformation $t = t(T)$ in g der Vektor $p(t)$ in den Vektor $q(T)$ mit den Komponenten $q_i(T) = k(T) p_i(t(T))$ übergeführt wird, wo $k(T)$ nicht verschwindet und zwischen je zwei Knickpunkten von g der Klasse C^2 angehört. Nunmehr werden zwei Punkte $g(t_3)$ und $g(t_4)$, wobei $t_1 \leq t_3 < t_4 \leq t_2$ ist, der Extremale g konjugiert genannt, wenn es eine begleitende Pseudoextremaloide u^i , τ , die p -normal ist, und drei nicht sämtlich verschwindende Konstanten c, d, e mit $cd \geq 0$ gibt, derart, daß

$$u^i(t) \equiv 0 \quad \text{in} \quad (t_3, t_4); \quad eu^i(t_3) = 0, \quad e\eta^i(t_4) = c\dot{g}^i(t_4^-) + d\dot{g}^i(t_4^+),$$

wobei $\eta^i = u^i + \tau \dot{g}^i$. Verf. beweist, daß diese Definition derjenigen von Graves äquivalent ist und sich im speziellen Falle der Variationsaufgabe in gewöhnlicher Form auf die Bedingung von Reid reduziert. Späteren Arbeiten bleibt es vorbehalten,

zu zeigen, wie mittels dieser Begriffe die Theorie der diskontinuierlichen Lösungen von Variationsproblemen in gewöhnlicher Form vereinfacht werden kann.

S. Cingini (Pavia).

Boerner, Hermann: Variationsrechnung aus dem Stokeschen Satz. Math. Z. 46, 709—719 (1940).

Verf. begründet hier die Variationsrechnung einfacher Integrale $\int f(t, x_i, p_i) dt$ ($p_i = dx_i/dt$; $i = 1, \dots, n$) auf neue Art, indem er durchgängig die Rechenweise der alternierenden Differentialformen verwendet. Diese bietet den Vorteil, daß sie alle die Teilintegration verallgemeinernden Sätze (von Gauß, Stokes usw.) in die eine einfache Formel $\int \omega = \int d\omega$ zusammenfaßt, in der links eine Differentialform, rechts ihr Differential steht, rechts über eine Mannigfaltigkeit, links über ihren Rand integriert wird. Nun kommt Teilintegration bei der Herleitung der Eulerschen Gleichungen (E. G.) und beim Hilbertschen Unabhängigkeitssatz vor. Daher kann Verf. gerade diese Ergebnisse durch sein neues Verfahren einheitlich gewinnen, darüber hinaus die Transversalitäts- und die Legendresche notwendige Bedingung. Das Verschwinden des Differentials der Form

$$\Omega = (f - p_i \dot{p}_i) dt + \dot{p}_i dx_i \quad (\text{über } i \text{ summieren!})$$

längs einer Kurve führt zu den E. G.; zu hinreichenden Bedingungen gelangt man, indem man Felder der Art betrachtet, daß $d\Omega$ in einem Gebiete des \mathbb{R}_{n+1} der Größen t, x_i verschwindet. Bezeichnet $[\Omega]$ den Wert von Ω nach dem Ersatze der p_i durch das Gefälle des Feldes, so nennt man dieses geodätisch, wenn $d[\Omega] = 0$. In solchen Feldern stößt Verf. auf die Weierstraßsche \mathcal{C} -Funktion und auf die n -stufigen, die Feldextremalen transversal schneidenden Flächen und kommt zum Kneserschen Transversalensatz.

Koschmieder (Graz).

Boerner, Hermann: Über die Legendresche Bedingung und die Feldtheorien in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale. Math. Z. 46, 720—742 (1940).

Mit der Rechenweise der alternierenden Differentialformen (s. vorsteh. Ref.) behandelt Verf. die Variationsrechnung mehrfacher Integrale der Gestalt

$$J = \int_G f(t_\alpha, x_i, p_{i\alpha}) dt_1 \dots dt_\mu \quad (\alpha = 1, \dots, \mu; i = 1, \dots, n; p_{i\alpha} = \partial x_i / \partial t_\alpha).$$

Dazu betrachtet er im $(\mu + n + \mu n)$ -stufigen Raume der $t_\alpha, x_i, p_{i\alpha}$ die Form μ -ten Grades $\omega = f(t_\alpha, x_i, p_{i\alpha}) dt_1 \dots dt_\mu$, die sich durch eine zu ω nach den n Pfaffschen Formen $\omega_i = dx_i - p_{i\alpha} dt_\alpha$ (über doppelt auftretende Zeiger summieren!) kongruente ersetzen läßt. Er gewinnt die E. G., dann die bisher sonst noch nicht aufgestellte Transversalitäts-Bedingung (T. B.) und Hadamards notwendige Bedingung von Legendrescher Art. Zu hinreichenden Bedingungen führen geodätische Felder. Ein Feld liegt vor, wenn die $p_{i\alpha}$ als Funktionen $p_{i\alpha}(t_\beta, x_j)$ gegeben sind; man setze, wenn Φ eine Form, $[\Phi] = (\Phi \text{ für } p_{i\alpha} = p_{i\alpha})$. Das Feld heißt im besondern geodätisch in bezug auf Ω , wenn $d[\Omega] = 0$; zu jeder Form Ω gehört ein besonderes geodätisches Feld. Die Gesamtheit dieser Feldbegriffe hat zuerst Lepage (dies. Zbl. 16, 262) ins Auge gefaßt und ihr die Feldlehren von Carathéodory [Acta Szeged 4, 193 bis 216 (1928/29)] und von De Donder (dies. Zbl. 13, 169) und Weyl (dies. Zbl. 13, 120) eingeordnet. Verlangt man von einer Feldlehre, daß sie auf alle Aufgaben, auch auf solche mit beweglichem Rande (b. R.), anwendbar sei, so hat man, wenn λ_α passende Parameter auf einer Extremale sind, das Vorhandensein einer Flächenschar $\lambda_\alpha = S_\alpha(t_\beta, x_j)$ zu fordern, so daß $[\Omega] = dS_1 \dots dS_\mu$ ist und ihre Mitglieder die Flächenteile $p_{i\alpha}$ transversal schneiden. Damit kommt man zwangsläufig zur Feldlehre von Carathéodory; ihr eignet die Form

$$\Omega = \frac{1}{j^\mu - 1} (j dt_1 + \dot{p}_{i1} \omega_i) \dots (j dt_\mu + \dot{p}_{i\mu} \omega_i).$$

Verf. berechnet die zugehörige \mathcal{C} -Funktion und gibt dann einen Satz hinreichender Bedingungen bei b. R. an: Das Extremalenstück soll klein genug sein, um sich in ein

geodätisches Feld einbetten zu lassen; am Rande soll die T. B. gelten und der Ort des Randes die durch diesen gelegte Röhre geodätischer Transversalen von außen berühren. Regulär heißt ein Flächenteilchen, wenn es eine Legendresche Bedingung als Ungleichung erfüllt. — Zum Schlusse zeigt Verf. am Beispiele

$f = p_x^2 + 2p_x^2 + 2p_y^2 + p_y^2$ (s, t die Unabhängigen, x, y die Abhängigen), daß Hadamards hinreichende Bedingung von Legendrescher Art bei b. R. versagt: Eine gewisse extremale 2-Ebene, die festberandet einen Kleinstwert liefert, verliert unter gewissen, dem b. R. auferlegten Bedingungen diese Eigenschaft, obwohl sie alle T. B. erfüllt.

Koschmieder (Graz).

Hestenes, M. R., and E. J. McShane: A theorem on quadratic forms and its application in the calculus of variations. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 501—512 (1940).

Im ersten Teil der Abh. wird durch eine Maximum-Minimum-Betrachtung der Satz bewiesen (Theorem 1): Es seien $P(z), Q_1(z), \dots, Q_r(z)$ reelle quadratische Formen in den reellen Variablen z_1, \dots, z_m mit folgenden Eigenschaften: 1. $P(z) > 0$ in jedem Punkte (z) , wo $Q_1(z) = Q_2(z) = \dots = Q_r(z) = 0$, außer in $(z) = (0)$. 2. Für jedes System reeller Konstanten S_1, \dots, S_r , die nicht alle Null sind, ist die quadratische

Form $\sum_{i=1}^r S_i Q_i(z)$ indefinit. 3. Zu jedem linearen Teilraum L des Raumes der Variablen

z_1, \dots, z_m , der mit der Mannigfaltigkeit $Q_1(z) = Q_2(z) = \dots = Q_r(z) = 0$ außer $(z) = (0)$ keinen Punkt gemeinsam hat, gibt es eine Linearverbindung $\sum_{i=1}^r S_i Q_i(z)$ der quadratischen Formen $Q_i(z)$, die auf L positiv definit ist. Dann gibt es ein System

von Werten S_1, \dots, S_r derart, daß die Form $P(z) + \sum_{i=1}^r S_i Q_i(z)$ in den Variablen

z_1, \dots, z_m positiv definit ist. — Im zweiten Teil wird dieses Theorem auf den Fall angewandt, wo $m = 2n$ und $(z) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ und die Q_i die $\frac{1}{2}n(n-1)$ speziellen Formen $x_i y_k - x_k y_i$ sind (Theorem 2). Um diese Anwendung zu ermöglichen, werden zwei weitere Sätze über Matrices (Theorem 3, 4) bewiesen, aus denen gefolgert werden kann, daß die speziellen Q_i die letzte Voraussetzung von Theorem 1 erfüllen. — Der dritte Teil bringt eine Anwendung auf die Variationsrechnung, um deretwillen die ganze Untersuchung unternommen wurde. Das Doppelintegral

$$I = \iint_A f(x, y, z_1, \dots, z_n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) dx dy,$$

wo $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $q_i = \frac{\partial z}{\partial y_i}$, soll zu einem Minimum gemacht werden in einer Klasse von „Teilräumen“ $z_i(x, y)$ ((x, y) in $A+B$; $i=1, \dots, n$), die eine gemeinsame Begrenzung haben. A ist ein von einer einfachen geschlossenen Kurve B begrenztes Gebiet. Passende Stetigkeits- und Differentiierbarkeitsannahmen werden gemacht. Der Teilraum E liefere ein Minimum, und auf E sei die Legendresche Bedingung in der strengeren Form erfüllt, daß für jedes Element (x, y, z, p, q) von E und für jedes Wertesystem (ξ, η) , für das die zweireihige Matrix $\begin{pmatrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \eta_1, \dots, \eta_n \end{pmatrix}$ den Rang 1 hat, die Ungleichung

$$\sum_{i,k=1}^n (f_{p_i p_k} \xi_i \xi_k + 2f_{p_i q_k} \xi_i \eta_k + f_{q_i q_k} \eta_i \eta_k) > 0$$

erfüllt ist. Dann gibt es Funktionen $S_{ik}(x, y) = -S_{ki}(x, y)$ ($i, k = 1, \dots, n$) mit folgender Eigenschaft: Ist

$$g(x, y, z, p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left\{ p_i \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^n S_{ik} z_k \right)}{\partial y} - q_i \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^n S_{ik} z_k \right)}{\partial x} \right\}$$

der Integrand des invarianten Integrals $J = \iint_A g(x, y, z, p, q) dx dy$, so erfüllt die

Funktion $F = f + g$ in jedem Element von E und für jedes Wertesystem $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$

die Ungleichheit

(Theorem 5).
$$\sum_{i,k=1}^n (F_{p_i p_k} \xi_i \xi_k + 2F_{p_i q_k} \xi_i \eta_k + F_{q_i q_k} \eta_i \eta_k) > 0.$$
 Bessel-Hagen (Bonn).

Funktionentheorie:

Ghika, Alexandre: Sur une inégalité que vérifient les fonctions de carré représentable par l'intégrale de Cauchy. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 598—600 (1940).

Es sei C der rektifizierbare Rand eines einfach zusammenhängenden Bereichs $D + C$; ferner sei C_1 der rektifizierbare Rand eines Teilbereichs $D_1 + C_1$ von $D + C$. Ist dann $f(z)$ eine in D analytische Funktion, die fast überall längs C (bei Annäherung längs C nicht berührender Wege) Randwerte besitzt, und deren Quadrat durch das über C (im Lebesgueschen Sinne) genommene Cauchysche Integral darstellbar ist, so besteht die Ungleichung

$$\int_{C_1} |f(z)|^2 ds \leq M^2 \int_C |f(z)|^2 ds,$$

wo M eine von $f(z)$ unabhängige Konstante bedeutet.

F. Lösch (Rostock).

Mirakyan, G.: Verallgemeinerung der statischen Interpretation von Stieltjes der Nullstellen einiger Polynome. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. **16**, 158—166 u. deutsch. Zusammenfassung 166 (1940) [Russisch].

Ce travail est en relation avec un travail de Stieltjes (Acta math. **6**, 321—326). On a trois points dont les masses sont A, B, C . On cherche n points dont la masse soit égale à l'unité qui sont en équilibre avec les masses A, B, C sous l'influence des forces provenant d'un potentiel logarithmique. Les positions d'équilibre sont les zéros des polynômes satisfaisant à une équation différentielle linéaire de deuxième ordre. L'a. donne aussi une interprétation analogue pour les zéros des polynômes de Laguerre et de Hermite.

N. Obreschkoff (Sofia).

Ostrowski, Alexandre: Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurent. Acta math. **72**, 99—155 u. 157—257 (1940).

Verf. untersucht die allgemeinen Eigenschaften der Nullstellen von Polynomen oder Potenzreihen in ihrer Abhängigkeit von den absoluten Beträgen der Koeffizienten. Nur die beiden letzten Paragraphen handeln von Anwendungen auf das Graeffesche Verfahren. Dieses hat bekanntlich zur Voraussetzung, daß die absoluten Beträge der Wurzeln voneinander absteigen, je mehr, desto besser. Zieht man das Newtonsche Polygon heran, so drückt sich dieser Umstand in der Konvexität desselben aus; je „konvexer“ es ist, desto engere Schranken lassen sich für die absoluten Beträge der Wurzeln angeben. Verf. führt das sehr breit aus und untersucht darüber hinaus die Möglichkeiten, das zugrunde liegende Polygon (Laurentsche Reihe) in Faktoren aufzuspalten. Für die Änderung der Wurzeln bei Abänderung der Gleichungskoeffizienten wird eine Schranke angegeben, die wegen ihrer Allgemeinheit allerdings ziemlich unscharf ist und für den praktischen Zweck, die auf ungenauer Berechnung der Gleichungskoeffizienten beruhenden Fehler abzuschätzen, kaum ausreicht; in einzelnen Fällen führen besondere Überlegungen zu besseren Ergebnissen. Endlich werden die verschiedenen Methoden zur Berechnung der Argumente der Wurzeln besprochen und drei Beispiele durchgerechnet.

Gröbner (Wien).

Korovkin, P.: Expression asymptotique des polynômes orthogonaux sur un contour rectifiable. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **27**, 531—534 (1940).

Soit D un domaine borné par le contour C et contenant le point à l'infini. Soit $z = \delta(x)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine D sur le domaine $|z| > 1$ et d'ailleurs $\delta(\infty) = a$, $\delta'(\infty) > 0$. En désignant par $x = \psi(z)$ la fonction inverse l'a. suppose que $\psi'(z)$ est continue jusqu'à $|z| = 1$ et que $\psi'(e^{i\theta})$ vérifie la condition de Lipschitz d'exposant $\alpha > \frac{1}{2}$. Soit $f(x)$ une fonction régulière dans D , continue dans le domaine fermé \bar{D} et différente de zéro dans ce domaine; $f(\infty) > 0$.

Pour les polynomes orthogonaux $p_n(x)$,

$$\int_C |f(x)|^2 |\delta'(x)| p_n(x) \overline{p_m(x)} ds = \delta_{n,m},$$

l'auteur démontre la formule asymptotique (1) $p_n(x) \sim \frac{\delta^*(x)}{\sqrt{2\pi f(x)}}$ dans D , donnée par Szegő dans le cas où C est analytique. Si $\psi(z)$ est régulière et univalente dans le domaine $|\delta(x)| > p$, $p < 1$, et la fonction $1/f(x)$ est régulière dans le domaine $D_r(|\delta(x)| > r, 1 > r > p)$, il démontre que la formule (1) est valable dans D_r .

N. Obreschkoff (Sofia).

Schaginjan, A.: Sur l'approximation au moyen de polynômes dans les domaines non jordanien. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 27, 318—320 (1940).

En relation avec un travail de Smirnof (ce Zbl. 22, 79) l'auteur considère quelques domaines D dans le plan de la variable complexe z bornés par des courbes C non jordanien tels qu'une approximation quadratique des fonctions régulières dans D par des polynomes est impossible.

N. Obreschkoff (Sofia).

Boas jr., R. P.: A correction. Ann. of Math., II. s. 40, 948 (1939).

In der in dies. Zbl. 19, 125 besprochenen Arbeit hat Verf. bemerkt, daß eine ganze Funktion $f(z)$, die der Ungleichung $|f(z)| < Ae^{R|z|}$ genügt und auf der reellen Achse beschränkt ist, die Form

$$f(z) = \int_{-R}^{+R} e^{izt} d\alpha(t)$$

mit nichtbeschränktem $\alpha(t)$ haben kann. Hier gibt er ein berichtiges Beispiel dafür, nämlich die Funktion

$$f(z) = \int_{0+}^{\pi/2} \sin zt \cdot d(\log \sin t).$$

Harald Geppert (Berlin).

Gelfer, S.: Zur Theorie der multivalenten Funktionen. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 239—249 u. deutsch. Zusammenfassung 249—250 (1940) [Russisch].

Verf. betrachtet die beiden Klassen: 1) S_p der in $|z| < 1$ regulären, p -wertigen Funktionen $f(z) = z^p(1 + a_1z + a_2z^2 + \dots)$, 2) E_p der in $|z| < 1$ regulären Funktionen $f(z) = z^k(1 + \alpha_1z + \alpha_2z^2 + \dots)$, $k \geq 1$, für die in $0 < |z| < 1$ $f'(z) \neq 0$ ist, und die überdies in jedem den Einheitskreis von innen herrührenden Kreis vom festen Radius $\varrho < 1$ schlicht sind. Ergebnisse: a) Ist $w = f(z) \in S_p$, so wird jeder Wert des Kreises $|w| < \varrho(p)$ je p -mal angenommen, wobei $\frac{1}{8p} < \varrho(p) \leq \frac{1}{4p}$ ist; es gilt ferner für $|z| = r < 1$ die Abschätzung

$$|f(z)| \geq \frac{1}{2^p} \frac{r^p}{(1+r)^{2p}}.$$

b) Ist $f(z) = z + \alpha_1z^2 + \alpha_2z^3 + \dots \in E_p$ und $\varrho > \frac{1}{2}$, so gelten die Ungleichungen

$$|\alpha_n| < \frac{\varrho e n^2}{2\varrho - 1}, \quad (2\varrho - 1)^3 \frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{\varrho}{2\varrho - 1} \frac{r}{(1-r)^2}$$

und ähnliche Ungleichungen für $|f'(z)|$ und $|\arg f'(z)|$. c) Ist $f(z) = z^k(1 + \alpha_1z + \dots) \in E_p$ und $\varrho \leq \frac{1}{2}$, $k \geq 1$, so ist

$$|\alpha_n| < \left(\frac{2}{\varrho}\right)^{\frac{8}{\varrho} + 2(k-1)} \cdot e k n^2,$$

$$|f(z)| < \left(\frac{2}{\varrho}\right)^{\frac{8}{\varrho} + 2(k-1)} \cdot \frac{k r}{(1-r)^2}.$$

Sind schließlich die beiden in b) und c) betrachteten Funktionen in $|z| < 1$ p -wertig,

so ist $|\alpha_n| < C p n$, wobei $C = \frac{\varrho e}{2\varrho - 1}$ für $\varrho > \frac{1}{2}$, $C = e k \left(\frac{2}{\varrho}\right)^{\frac{8}{\varrho} + 2(k-1)}$ für $\varrho \leq \frac{1}{2}$.

Harald Geppert (Berlin).

Golusin, G. M.: Über p -valente Funktionen. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 277—283 u. deutsch. Zusammenfassung 284 (1940) [Russisch].

Verf. betrachtet die Klassen: 1) S_p der in $|z| < 1$ regulären p -wertigen Funktionen

$w = f(z) = z^p(1 + a_1z + a_2z^2 + \dots)$, 2) Σ_p der in $|z| > 1$ mit Ausnahme des Poles $z = \infty$ regulären, p -wertigen Funktionen $w = F(z) = z^p\left(1 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots\right)$, 3) Σ'_p der Funktionen aus Σ_p , die den Wert 0 nicht annehmen. Er beweist: Für jede Funktion aus Σ_p ($p \geq 1$) gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_{p+n}|^2 \leq p + (p-1) |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_{p-1}|^2;$$

für Σ'_p ist schärfer: $\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_{p+n}|^2 \leq$ einer nur von p abhängigen Konstanten B_p ; insbesondere berechnet sich $B_2 = 18$, $B_3 = 300$, und die entsprechenden Extremalfunktionen sind

$$F(z) = z^2(1 + \eta z^{-1})^4 \quad \text{bzw.} \quad z^3(1 + \eta z^{-1})^6, \quad |\eta| = 1.$$

Für jede Funktion aus Σ'_p gilt $|\alpha_1| \leq 2p$, $|\alpha_2| \leq p(2p-1)$, $|\alpha_n| \leq$ einer nur von n und p abhängigen Konstanten $A_{n,p}$. Die Extremalfunktion der ersten beiden Ungleichungen ist $F(z) = z^p(1 + \eta z^{-1})^{2p}$, $|\eta| = 1$. Ist für ein $F(z)$ aus Σ'_p $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$, $k \geq 2$, so gilt $|\alpha_n| \leq \frac{2p}{n}$ ($n = k, \dots, 2k-1$), wobei die Gleich-

heit nur für $F(z) = z^p(1 + \eta z^{-n})^{\frac{2p}{n}}$, $|\eta| = 1$ gilt. — Durch Betrachtung der Funktion $F\left(\frac{1}{z}\right)^{-1}$ gelangt man zu analogen Aussagen für die Klasse S_p ($p \geq 1$). Die dem Einheitskreis entsprechenden Werte von $f(z)$ aus S_p bedecken vollständig den Kreis $|w| \leq 2^{-(p+1)}$; ist $a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$, so bedecken sie sogar den Kreis $|w| < \frac{1}{2}$ und für $a_1 = \dots = a_p = 0$ sogar $|w| < \frac{1}{2}$ vollständig; diese letzten Kreise können nicht konzentrisch vergrößert werden, wie die Funktionen $f(z) = z^p(1 - z^p)^2$ bzw. $f(z) = z^p(1 - z^{2p})$ zeigen. — Gehört schließlich $F(z)$ zu Σ_p , $p \geq 1$, so gilt in $|z| \geq 1$ die Ungleichung

$$|F'(z)| \leq C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) \cdot \frac{|z|^p}{|z| - 1},$$

in der für Σ'_p die Konstante sogar durch eine nur von p abhängende Größe ersetzt werden darf.

Harald Geppert (Berlin).

Bieberbach, Ludwig: Schlitzabbildungen durch rationale Funktionen. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, Beibl. Nr 32, 143—148 (1940).

Beweis des sehr naheliegenden Satzes, daß die einzigen rationalen Funktionen, welche den Einheitskreis schlicht in eine (einfach) geschlitzte Ebene überführen, aus der Extremalfunktion der schlichten Abbildung $w = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z})^{-2}$ durch beliebige lineare Abbildungen in w und Abbildung des Einheitskreises in sich hervorgehen. Die Einzigekeitsaussage wird dann noch für etwas allgemeinere Arten eindeutiger Funktionen bestätigt.

Ulrich (Gießen).

Khajalia, G.: Sur la théorie de la représentation conforme des domaines doublement connexes. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 97—105 u. franz. Zusammenfassung 105—106 (1940) [Russisch].

Taylor, A. E.: A theorem concerning analytic continuation for functions of several complex variables. Ann. of Math., II. s. 40, 855—861 (1939).

Grundlegend für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen ist folgender Satz: „ \mathfrak{B} sei ein endlicher, schlichter Bereich des $2n$ -dim. Raumes mit zusammenhängendem Rande \mathfrak{C} . $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ sei auf \mathfrak{C} eindeutig und analytisch. Dann läßt sich f durch analytische Fortsetzung zu einer in ganz \mathfrak{B} eindeutigen und analytischen Funktion ergänzen.“ [S. etwa W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1, 206 (1929), 2. Aufl.]. A. B. Brown bemerkte, daß die bisherigen Beweise für diesen Satz lückenhaft sind, und gab einen neuen, den topologischen Schwierigkeiten Rechnung tragenden Beweis an [s. Duke math. Journ. 2 (1936); dies. Zbl. 13, 407]. Bei der Aufstellung einer Verallgemeinerung fand F. Sommer einen weiteren Beweis (s. Math. Ann. 114, 441 (1937); dies. Zbl. 17, 26]. Verf. gibt nun einen weiteren, ähnlichen, sehr übersichtlichen Beweis für den oben formulierten Satz an.

Behnke.